

Vorlesungen über

Mathematische Methoden

der

Theoretischen Elektrotechnik

von
Stefan Kurz

Professur für Theoretische Elektrotechnik
und numerische Feldberechnung
Helmut-Schmidt Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg

Hamburg 2004
Alle Rechte vorbehalten

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorrechnung	2
1.1	Einleitung	2
1.2	Vektorräume und lineare Abbildungen	2
1.3	Koordinatentransformationen	6
1.4	Skalarprodukt und Euklidischer Vektorraum	8
1.5	Vektorprodukt und Orientierung	10
1.5.1	Inhalt	10
1.5.2	Orientierung	11
1.5.3	Vektorprodukt	12
1.6	Mehrfache Vektorprodukte	15
1.6.1	Das Spatprodukt	15
1.6.2	Das doppelte Vektorprodukt	16
2	Felder und Koordinatensysteme	18
2.1	Euklidisch-affiner Raum E_3	18
2.2	Ortsvektor und kartesische Koordinaten	19
2.3	Skalare Felder und Vektorfelder	19
2.3.1	Der Feldbegriff	19
2.3.2	Komponenten und Koordinaten	20
2.4	Krummlinige Koordinatensysteme	21
2.4.1	Allgemeine krummlinige Koordinatensysteme	21
2.4.2	Kreiszyylinder-Koordinatensystem	24
2.4.3	Kugelkoordinaten	26
2.4.4	Beispiele	28
3	Kurven, Flächen und räumliche Gebiete	32
3.1	Kurven in E_3	32
3.1.1	Kurvenintegral	34
3.1.2	Beispiele	38
3.2	Flächen in E_3	42
3.2.1	Integrale im Parameterbereich	45

3.2.2	Flächenintegral	48
3.2.3	Beispiele	53
3.3	Gebiete in E_3	58
3.3.1	Beispiele	62
4	Differentialoperatoren und Integralsätze	68
4.1	Gradient und Hauptsatz der Integralrechnung	68
4.1.1	Definition und Eigenschaften des Gradienten	68
4.1.2	Hauptsatz der Integralrechnung	70
4.1.3	Richtungsableitung	71
4.1.4	Beispiele	73
4.2	Rotation und Stokes'scher Integralsatz	76
4.2.1	Definition und Eigenschaften der Rotation	76
4.2.2	Der Integralsatz von Stokes	80
4.2.3	Beispiele	82
4.3	Divergenz und Gauß'scher Integralsatz	86
4.3.1	Definition und Eigenschaften der Divergenz	86
4.3.2	Der Integralsatz von Gauß	89
4.3.3	Beispiele	90
4.4	Lemmata von Poincaré	94
4.4.1	Erstes Lemma von Poincaré	94
4.4.2	Zweites Lemma von Poincaré	95
4.4.3	Beispiele	101
4.4.4	DeRham-Kohomologie	103
	Literaturverzeichnis	109
	Index	110
	Impressum	113

Ziel der Lehrveranstaltung MTET

Die im Grundstudium erworbenen Kenntnisse der Vektoranalysis sollen vertieft werden. Die Studierenden sollen in die Lage versetzt werden, die Begriffsbildungen der Vektoranalysis geometrisch-anschaulich zu deuten. Gleichzeitig sollen die notwendigen rechentechnischen Fertigkeiten erworben und eingeübt werden, um die Vektoranalysis selbständig und erfolgreich auf feldtheoretische Problemstellungen anwenden zu können. Aus diesem Grund werden in der Lehrveranstaltung zahlreiche Beispiele besprochen.

Literaturempfehlungen

1. H. Schulz. *Physik mit Bleistift*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1993. [Sch93]

Kapitel 1

Vektorrechnung

1.1 Einleitung

In der Physik werden gerichtete Größen durch Vektoren dargestellt und zeichnerisch durch Pfeile repräsentiert. Die Länge des Pfeils gibt den Betrag des Vektors an. Zwei Vektoren sind dann gleich, wenn sie in Betrag **und** Richtung miteinander übereinstimmen. Die Pfeil-Repräsentanten brauchen dazu nicht in Anfangs- und Endpunkt zusammenzufallen, man spricht in diesem Zusammenhang auch von *freien Vektoren*. Will man speziell die freie Verschiebbarkeit nicht zulassen, spricht man von *gebundenen Vektoren*. Physikalische Beispiele für Vektoren sind Geschwindigkeit \vec{v} , Beschleunigung \vec{a} , Kraft \vec{F} , elektrische Feldstärke \vec{E} , magnetische Feldstärke \vec{H} , etc. Physikalische vektorielle Größen besitzen Maßzahl mit Maßeinheit und Richtung. Im Gegensatz dazu besitzen skalare physikalische Größen nur eine Maßzahl mit Maßeinheit.

In den nachfolgenden Abschnitten soll der physikalisch-anschauliche Vektorbegriff mathematisch präzisiert werden.

1.2 Vektorräume und lineare Abbildungen

Eine Menge V mit den Elementen $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ heißt *linearer Vektorraum* über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen, wenn zwei Verknüpfungen definiert sind: Die Addition, die einem Paar von Vektoren (\vec{x}, \vec{y}) einen Vektor $\vec{x} + \vec{y}$ zuordnet, und die Multiplikation mit einem Skalar $a \in \mathbb{R}$, die einen Vektor \vec{x} in $a\vec{x}$ überführt, auch Vervielfachung genannt. Die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar müssen die bekannten Axiome des linearen Vektorraums erfüllen, die hier nicht wiederholt zu werden brauchen [BS87].

Man nennt die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i = 0 \quad (1.1)$$

nur die triviale Lösung $a_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ besitzt. Falls sich jeder Vektor $\vec{x} \in V$ in der Form

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \quad (1.2)$$

mit linear unabhängigen \vec{e}_i darstellen lässt, bilden die \vec{e}_i eine *Basis* des Vektorraums V . Durch (1.2) sind die n *Koordinaten* $x_i \in \mathbb{R}$ des Vektors \vec{x} eindeutig festgelegt. Die Zahl n ist die *Dimension* von V , wobei hier nur endlichdimensionale Vektorräume betrachtet werden sollen. Die einzelnen Summanden $x_i \vec{e}_i$ heißen *Komponenten* von \vec{x} bezüglich der gewählten Basis. Insbesondere können für $n = 3$ die Vektoren aus V physikalisch-anschaulich interpretiert werden, wie in der Einleitung angedeutet.

Im folgenden werden *lineare Abbildungen* eine wichtige Rolle spielen. Eine Abbildung $A : V \rightarrow W$ des Vektorraums V in den Vektorraum W heißt *linear*, wenn für alle Elemente \vec{x}, \vec{y} aus V und alle $a \in \mathbb{R}$ stets gilt

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}), \quad A(a\vec{x}) = aA(\vec{x}). \quad (1.3)$$

Addition und Vervielfachung von Vektoren aus V führen auf Addition und Vervielfachung der zugehörigen Bildvektoren aus W . Eine **umkehrbar eindeutige** verknüpfungstreue Abbildung (hier bezüglich Addition und Multiplikation mit einem Skalar) wird auch *Isomorphismus* genannt. Man sagt, der Vektorraum V ist *isomorph* zum Vektorraum W . Anschaulich gesprochen kann man sagen, dass sich zwei isomorphe (wörtlich „gleichgestaltige“) Räume im Grunde nur durch die Namen ihrer Elemente unterscheiden: die von V heißen \vec{x}, \vec{y}, \dots , die von W hingegen $A(\vec{x}), A(\vec{y}), \dots$. Alle durch Addition und Vervielfachung ausdrückbaren Beziehungen zwischen Elementen des einen Raumes gelten ohne jede Änderung auch für ihre „Zwillingsbrüder“ in dem anderen. Deshalb werden wir uns gelegentlich die Freiheit nehmen, isomorphe Räume einfach zu identifizieren, also auch noch von ihrem letzten Unterschied, der Verschiedenheit der Elementnamen, abzusehen.

Vor dem Hintergrund dieser Begriffsbildungen kann man die Gleichung (1.2) auch so interpretieren: Durch die Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ wird jedem Vektor \vec{x} ein *Koordinatenvektor* $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet. Bei der Zuordnungsvorschrift (1.2) handelt es sich um eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung. Folglich ist der Vektorraum V und damit jeder n -dimensionale Vektorraum isomorph zu \mathbb{R}^n , sobald eine Basis eingeführt wird.

Bei einmal definierter Basis verzichtet man häufig auf ihre Angabe und beschreibt einen Vektor $\vec{x} \in V$ durch den ihm zugeordneten Koordinatenvektor $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entweder als *Zeilenvektor*

$$\vec{x} \cong (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

oder als *Spaltenvektor*

$$\vec{x} \cong \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Das Symbol \cong bedeutet eine Gleichheit im Sinne des Isomorphismus, der durch die Basis gestiftet wird, denn die Vektoren auf der linken und rechten Seite liegen in verschiedenen Räumen. Häufig wird über diesen Unterschied hinweggesehen, und ein gewöhnliches Gleichheitszeichen geschrieben. Das kann Anlass zu Missverständnissen geben, zum Beispiel in Verbindung mit Koordinatentransformationen. Bei einem Wechsel der Basis wird **derselbe** Vektor \vec{x} durch **unterschiedliche** Koordinatenvektoren dargestellt, was in Verbindung mit Gleichheitszeichen völlig unverständlich wäre.

Die Vervielfachung eines Vektors ist der Vervielfachung seines Koordinatenvektors äquivalent,

$$a\vec{x} \cong a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix},$$

die Summe zweier Vektoren der Summe der Koordinatenvektoren,

$$\vec{x} + \vec{y} \cong \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig festgelegt. Ist V ein n -dimensionaler Vektorraum mit Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ und W ein m -dimensionaler Vektorraum mit Basis $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m)$, hat man

$$A(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^m A_{ij} \vec{f}_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Die Koeffizienten A_{ij} bilden eine reelle $n \times m$ -Matrix, das heißt $(A_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Falls $m = n$ und $\det(A_{ij}) \neq 0$ gilt, existiert die inverse Abbildung A^{-1} , und A ist ein Isomorphismus der Räume V und W .

Das Bild eines beliebigen Vektors \vec{x} aus V kann aufgrund der Linearität (1.3) ermittelt werden,

$$\begin{aligned} \vec{y} = A(\vec{x}) &= A \left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i A(\vec{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m A_{ij} \vec{f}_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_i A_{ij} \right) \vec{f}_j = \sum_{j=1}^m y_j \vec{f}_j, \end{aligned} \quad (1.5)$$

wobei

$$y_j = \sum_{i=1}^n x_i A_{ij} \quad (1.6)$$

gilt. Die Erweiterung (1.5) einer zunächst nur für die Basisvektoren erklärten linearen Abbildung (1.4) auf beliebige Vektoren des Vektorraums nennt man *lineare Fortsetzung*. Gleichung (1.6) kann in der Form

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1, x_2, \dots, x_n) (A_{ij}) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = (A_{ij})^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dargestellt werden: Das Bild des Vektors \vec{x} unter der linearen Abbildung A bekommt man, indem man den Koordinatenvektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ mit der transponierten Matrix multipliziert. Man erhält dadurch den Koordinatenvektor $(y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ zu \vec{y} .

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass eine lineare Abbildung A nach Einführung von Basen in den Vektorräumen durch eine Koeffizientenmatrix $(A_{ij}) \cong A$ repräsentiert werden kann. Geht man in den Vektorräumen zu anderen Basen über, wird **dieselbe** lineare Abbildung durch **unterschiedliche** Koeffizientenmatrizen repräsentiert.

Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen nennt man in der Sprache der Physik *Tensoren zweiter Stufe*, Vektoren nennt man *Tensoren erster Stufe*, Skalare *Tensoren nullter Stufe*. Die Stufe eines Tensors ergibt sich aus der Anzahl der Indices, die zur Beschreibung des Tensors nach Einführung einer Basis erforderlich sind.

1.3 Koordinatentransformationen

Ziel dieses Abschnittes soll zunächst sein, das Transformationsgesetz für die Koordinaten von Vektoren bei einem Basiswechsel des zugrunde liegenden Vektorraums V anzugeben. Dazu wird zuerst das Transformationsverhalten der Basiselemente untersucht und daraus das Transformationsverhalten der Koordinaten gewonnen.

Ausgangspunkt ist eine Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ von V . Die transformierte Basis soll mit $(\tilde{\vec{e}}_1, \tilde{\vec{e}}_2, \dots, \tilde{\vec{e}}_n)$ bezeichnet werden. Der Zusammenhang zwischen der Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ und der Basis $(\tilde{\vec{e}}_1, \tilde{\vec{e}}_2, \dots, \tilde{\vec{e}}_n)$ wird hierbei durch eine Koeffizientenmatrix $(T_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gemäß

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n T_{ij} \tilde{\vec{e}}_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.7)$$

festgelegt, mit $\det(T_{ij}) \neq 0$.

Ein Vektor $\vec{x} \in V$ kann bezüglich der ursprünglichen Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ oder der transformierten Basis $(\tilde{\vec{e}}_1, \tilde{\vec{e}}_2, \dots, \tilde{\vec{e}}_n)$ zerlegt werden,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j \tilde{\vec{e}}_j. \quad (1.8)$$

Andererseits ist wegen (1.7)

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n T_{ij} \tilde{\vec{e}}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i T_{ij} \right) \tilde{\vec{e}}_j.$$

Zwischen den Koordinaten erhält man durch Vergleich mit (1.8)

$$\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^n x_i T_{ij}, \quad (1.9)$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = (T_{ij})^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Man sagt, dass sich die Koordinaten eines Vektors *kontravariant* zur Basis transformieren.

Zum Schluss soll noch das Transformationsverhalten der Koeffizientenmatrix einer linearen Abbildung hergeleitet werden. Die Abbildung

$$A : V \rightarrow W : \vec{x} \mapsto \vec{y} = A(\vec{x})$$

hat bezüglich der Basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ beziehungsweise $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m)$ die Darstellung (1.6)

$$y_j = \sum_{i=1}^n x_i A_{ij},$$

und bezüglich der transformierten Basen $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$ beziehungsweise $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_m)$ die Darstellung

$$\tilde{y}_l = \sum_{k=1}^n \tilde{x}_k \tilde{A}_{kl}. \quad (1.10)$$

Der Zusammenhang zwischen den Basen ist durch die Transformationsmatrizen $(T_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beziehungsweise $(U_{jl}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in der Form

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= \sum_{k=1}^n T_{ik} \tilde{e}_k, & i &= 1, \dots, n, \\ \vec{f}_j &= \sum_{l=1}^m U_{jl} \tilde{f}_l, & j &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

gegeben. Aus dem zuvor Gesagten folgt daraus für die Koordinaten

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= \sum_{i=1}^n x_i T_{ik}, & k &= 1, \dots, n, \\ \tilde{y}_l &= \sum_{j=1}^m y_j U_{jl}, & l &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Setzt man dies zusammen mit (1.6) in (1.10) ein, bekommt man

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_i A_{ij} \right) U_{jl} &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i T_{ik} \right) \tilde{A}_{kl}, \\ \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m A_{ij} U_{jl} \right) &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{k=1}^n T_{ik} \tilde{A}_{kl} \right), & l &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Dies kann nur für ganz beliebige $x_i \in \mathbb{R}$ gelten, wenn auch

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} U_{jl} = \sum_{k=1}^n T_{ik} \tilde{A}_{kl}, \quad i = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, m$$

erfüllt ist. In Matrixschreibweise lautet die Gleichung

$$\left(A_{ij} \right) \left(U_{jl} \right) = \left(T_{ik} \right) \left(\tilde{A}_{kl} \right).$$

Das gesuchte Transformationsgesetz für die Koeffizientenmatrizen lautet daher

$$\left(\tilde{A}_{kl} \right) = \left(T_{ik} \right)^{-1} \left(A_{ij} \right) \left(U_{jl} \right). \quad (1.11)$$

1.4 Skalarprodukt und Euklidischer Vektorraum

In diesem Abschnitt wird der Vektorraum V mit einem *Skalarprodukt* versehen. Ein Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt erklärt ist, heißt *Euklidischer Vektorraum*. Damit kann man Beträge von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren bestimmen, was mit den bis jetzt diskutierten algebraischen Konzepten alleine nicht möglich ist.

Ein Skalarprodukt wird durch eine bilineare Abbildung $(\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben,

$$(a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2) \cdot \vec{y} = a_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{y} + a_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{y} \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in V; a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

$$\vec{x} \cdot (a_1 \vec{y}_1 + a_2 \vec{y}_2) = a_1 \vec{x} \cdot \vec{y}_1 + a_2 \vec{x} \cdot \vec{y}_2 \quad \forall \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in V; a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Die bilineare Abbildung muss symmetrisch und positiv definit sein, das heißt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \quad (1.12a)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \in V, \vec{x} \neq 0. \quad (1.12b)$$

Bekanntlich definiert man den Betrag x eines Vektors \vec{x} zufolge

$$x = |\vec{x}| \stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}. \quad (1.13)$$

Vektoren vom Betrag Eins nennt man *Einheitsvektoren*, wie zum Beispiel

$$\vec{x}_0 = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad \vec{x} \neq 0.$$

Neben dem Betrag kann man mit Hilfe des Skalarprodukts auch Winkel zwischen zwei Vektoren definieren, indem man

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}, \quad \vec{x}, \vec{y} \neq 0 \quad (1.14)$$

setzt. Wenn $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ gilt, sind die beiden Vektoren *orthogonal* zueinander. Gleichung (1.14) wird in der physikalisch-anschaulichen Definition des Skalarproduktes als Definitionsgleichung verwendet, indem man

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \stackrel{\text{Def}}{=} |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y})$$

setzt.

Wir führen im Vektorraum V eine Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ ein und zerlegen die Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ bezüglich der Basis,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \quad \vec{y} = \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j.$$

Aus der Bilinearität folgt damit

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j x_i y_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j \quad \text{mit} \quad g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Die Matrix $(g_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist wegen (1.12a) symmetrisch und wegen (1.12b) positiv definit. Mit Hilfe der Koeffizienten (g_{ij}) lässt sich nach (1.15) das Skalarprodukt zweier Vektoren aus den zugehörigen Koordinatenvektoren berechnen.

Mit den Methoden aus Abschnitt 1.3 kann man das Verhalten der Koeffizienten g_{ij} bei einem Basiswechsel herleiten, wenn man von (1.9) ausgeht. Man findet

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^n T_{ik} T_{jl} \tilde{g}_{kl}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

oder in Matrixschreibweise

$$(g_{ij}) = (T_{ik}) (\tilde{g}_{kl}) (T_{jl})^T. \quad (1.16)$$

Da es sich bei (g_{ij}) um eine symmetrische positiv definite Matrix handelt, kann immer eine Transformationsmatrix $(T_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so gefunden werden, dass gilt

$$\tilde{g}_{kl} = \tilde{\vec{e}}_k \cdot \tilde{\vec{e}}_l = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l \end{cases}, \quad k, l = 1, \dots, n, \quad (1.17)$$

dabei ist δ_{kl} das *Kronecker-Symbol*. Das folgt aus der Diagonalisierbarkeit symmetrische Matrizen und soll hier nicht weiter ausgeführt werden. Gleichung (1.17) besagt, dass die Basisvektoren der transformierten Basis paarweise orthogonal sind und den Betrag Eins besitzen. Ausgehend von einer beliebigen Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ von V ist es deshalb immer möglich, eine *orthonormale Basis* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ anzugeben. Umgekehrt kann man ein Skalarprodukt auch dadurch einführen, dass man eine bestimmte Basis als orthonormale Basis auszeichnet. Für eine orthonormale Basis ergibt sich ein besonders einfacher Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und ihren Koordinatenvektoren, nämlich

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1.18)$$

Man muss sich darüber klar sein, dass dieser einfache Zusammenhang nur in Koordinaten einer **Orthonormalbasis** gilt.

1.5 Vektorprodukt und Orientierung

Das Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren, auch äußeres Produkt genannt, soll wieder einen Vektor ergeben. Um es definieren zu können, sind zunächst zwei weitere Begriffe zu besprechen, nämlich Inhalt und Orientierung.

1.5.1 Inhalt

Zwei Vektoren spannen ein Parallelogramm auf, drei Vektoren ein Parallelepipet, allgemein p Vektoren ein *Parallelfach*. Wir bezeichnen die Vektoren aus V mit $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$. Für den Inhalt $\|\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\| > 0$ des Parallelfachs gilt

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\|^2 &= \begin{vmatrix} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 & \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_p \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_p \cdot \vec{x}_1 & \vec{x}_p \cdot \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_p \cdot \vec{x}_p \end{vmatrix} \\ &= \det(\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j), \quad i, j = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Die Determinante auf der rechten Seite von Gleichung (1.19) heißt *Gram'sche Determinante*. Für $p = 2$ ist das unmittelbar einsichtig. Dann ist nämlich

$$\|\vec{x}_1, \vec{x}_2\|^2 = \begin{vmatrix} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 & \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2 \end{vmatrix}$$

$$= |\vec{x}_1|^2 |\vec{x}_2|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = |\vec{x}_1|^2 |\vec{x}_2|^2 \sin^2 \varphi,$$

$$\|\vec{x}_1, \vec{x}_2\| = |\vec{x}_1| |\vec{x}_2| |\sin \varphi|,$$

wobei $\varphi = \angle(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ der von \vec{x}_1 und \vec{x}_2 eingeschlossene Winkel ist. Bei physikalisch-anschaulicher Interpretation des Vektorraums V ist $\|\vec{x}_1, \vec{x}_2\|$ somit der elementargeometrische Flächeninhalt des Parallelogramms. Der durch (1.19) erklärte Inhalt ist unabhängig von der Reihenfolge der Vektoren. Vertauscht man zwei der Vektoren, hat dies in der Determinante eine paarweise Vertauschung zweier Zeilen und Spalten zur Folge. Nach den Rechenregeln für Determinanten ändert dies nichts an deren Wert.

Für $p = 1$ erhält man aus (1.19) übrigens

$$\|\vec{x}_1\| = |\vec{x}_1|,$$

der Inhalt eines Vektors ist gleich seinem Betrag.

1.5.2 Orientierung

Um das Vektorprodukt definieren zu können, ist es erforderlich, den zugrunde liegenden Vektorraum V mit einer *Orientierung* zu versehen. Ein Vektorraum besitzt zwei Orientierungsklassen. Einen Vektorraum orientieren heißt, sich für eine dieser beiden Orientierungsklassen zu entscheiden. Eine Orientierung kann durch Vorgabe einer Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ von V festgelegt werden, wobei es hier nur auf die Reihenfolge der Basisvektoren ankommt. Eine beliebige Basis $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$ von V nennt man dann *positiv orientiert*, wenn sie aus $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ gemäß (1.7) durch eine Transformationsmatrix (T_{ij}) mit positiver Determinante hervorgeht. Ansonsten nennt man die Basis *negativ orientiert*. Es soll noch bemerkt werden, dass die Orientierung eines Vektorraums unabhängig von der Einführung eines Skalarproduktes geschehen kann. Skalarprodukt und Orientierung sind ganz unterschiedliche Konzepte.

Physikalisch-anschaulich kann man die Orientierung eines Vektorraums durch einen *Schraubensinn* beschreiben. Die beiden Orientierungsklassen entsprechen einem *Rechtsschraubensinn* beziehungsweise einem *Linksschraubensinn*. Üblicherweise wählt man die vorgegebene Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ so, dass die Basisvektoren eine Rechtsschraube bilden: Dreht man \vec{e}_1 über den kleineren Winkel zwischen \vec{e}_1 und \vec{e}_2 in die Richtung des Vektors \vec{e}_2 , so soll \vec{e}_3 in der Richtung liegen, in die eine Rechtsschraube fortschreitet. Durch diese Konvention entspricht der Rechtsschraubensinn der Klasse der positiv orientierten Basen und der Linksschraubensinn der Klasse der negativ orientierten Basen.

1.5.3 Vektorprodukt

Gewünschte Eigenschaften

Zur Bezeichnung des Vektorproduktes benötigt man ein neues Multiplikationszeichen. Üblich ist das Zeichen \times , daher auch der Name *Kreuzprodukt*. Wir verlangen, dass das Vektorprodukt durch eine bilineare Abbildung $(\times) : V \times V \rightarrow V$ gegeben sein soll,

$$(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2) \times \vec{y} = a_1\vec{x}_1 \times \vec{y} + a_2\vec{x}_2 \times \vec{y} \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in V; a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

$$\vec{x} \times (a_1\vec{y}_1 + a_2\vec{y}_2) = a_1\vec{x} \times \vec{y}_1 + a_2\vec{x} \times \vec{y}_2 \quad \forall \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in V; a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Außerdem soll das Vektorprodukt alternierend sein,

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \quad (1.21)$$

das heißt die Reihenfolge der Faktoren ist erheblich. Daraus folgt unmittelbar

$$\vec{x} \times \vec{x} = 0. \quad (1.22)$$

Obwohl wir das Vektorprodukt unabhängig von einer Basis definieren wollen, ist es interessant zu überlegen, welche Schlussfolgerungen man durch Einführung einer Basis ziehen könnte. Aufgrund der geforderten Bilinearität würde es genügen, das Vektorprodukt für die Basisvektoren zu definieren. Von den n^2 möglichen Produkten der Basisvektoren sind aufgrund der Eigenschaft (1.22) die n Produkte der Basisvektoren mit sich selbst Null. Die verbleibenden $n(n-1)$ Produkte sind wegen (1.21) paarweise linear abhängig, so dass höchstens $n(n-1)/2$ linear unabhängige Produkte verbleiben. Diese Produkte spannen den Bildraum auf. Weil das Vektorprodukt wieder auf den ursprünglichen Raum V abbilden soll, muss gelten

$$n(n-1)/2 = n.$$

Die einzige positive Lösung dieser Gleichung ist $n = 3$. Ein Vektorprodukt mit diesen Eigenschaften kann deshalb **nur in drei Dimensionen** existieren. Für den Rest dieses Kapitels soll deshalb stets $\dim V = 3$ gelten.

Wenn wir von der Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ von V ausgehen, besitzen die Faktoren \vec{x} und \vec{y} die Darstellungen

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3.$$

Macht man von der geforderten Bilinearität des Vektorproduktes Gebrauch, erhält man durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
 \vec{x} \times \vec{y} &= (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \\
 &= x_1y_1 \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + x_1y_2 \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + x_1y_3 \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \\
 &\quad + x_2y_1 \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + x_2y_2 \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + x_2y_3 \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \\
 &\quad + x_3y_1 \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + x_3y_2 \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + x_3y_3 \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \\
 &= (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \\
 &\quad + (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \\
 &\quad + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{e}_3 \times \vec{e}_1,
 \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Umformung (1.21) und (1.22) verwendet wurden. Dieser etwas umständliche Ausdruck kann unter Verwendung einer Determinante wesentlich verkürzt werden,

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (1.23)$$

wovon man sich überzeugen kann, wenn man die Determinante nach der ersten Zeile entwickelt.

Definition

Nun sind wir in der Lage, das Vektorprodukt zu definieren. Der Vektor $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ wird durch folgendes basisunabhängige Konstruktionsverfahren festgelegt:

1. \vec{z} ist orthogonal zu \vec{x} und \vec{y} , das heißt

$$\vec{z} \cdot \vec{x} = \vec{z} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V. \quad (1.24a)$$

2. Der Betrag von \vec{z} stimmt mit dem Inhalt des von \vec{x} und \vec{y} aufgespannten Parallelogramms überein, das heißt

$$|\vec{z}| = \|\vec{x}, \vec{y}\| = |\vec{x}| |\vec{y}| |\sin \varphi|, \quad (1.24b)$$

wobei $\varphi = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ den von \vec{x} und \vec{y} eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

3. Falls $\vec{z} \neq 0$ ist, bilden $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ eine positiv orientierte Basis von V .

Falls \vec{x} und \vec{y} linear unabhängig sind, ist durch (1.24a) die Richtung von \vec{z} bis auf das Vorzeichen eindeutig festgelegt. Das Vorzeichen ergibt sich aus der dritten Forderung. Der Betrag von \vec{z} folgt aus (1.24b).

Falls \vec{x} und \vec{y} linear abhängig sind, folgt aus (1.24b) $\vec{z} = 0$. Die andern Forderungen sind in diesem Fall irrelevant.

Diese Überlegungen zeigen, dass unsere Definition tatsächlich jedem geordneten Paar von Vektoren aus V wieder einen Vektor aus V zuordnet. Die Eigenschaft (1.22) ergibt sich ebenfalls unmittelbar aus der Definition. Die Forderungen (1.24a) und (1.24b) sind nämlich unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Die dritte Forderung hat bei einer Vertauschung von \vec{x} und \vec{y} eine Vorzeichenumkehr von \vec{z} zur Folge. Man kann auch zeigen, dass es sich bei der durch das Konstruktionsverfahren festgelegten Abbildung tatsächlich um eine **bilineare** Abbildung handelt, was hier aber unterbleiben soll.

Darstellung in Komponenten

Um aus Gleichung (1.23) eine Darstellung des Vektorproduktes in Komponenten zu gewinnen, müssen wir nun die Vektorprodukte der Basisvektoren konstruieren. Dabei beschränken wir uns auf **positiv orientierte Orthonormalbasen**. Das stellt keine Einschränkung dar. Im Abschnitt 1.4 wurde erläutert, dass jeder Euklidische Vektorraum eine Orthonormalbasis besitzt. Die positive Orientierung der Basis kann gegebenenfalls durch Vertauschung zweier Basisvektoren hergestellt werden. Man überzeugt sich leicht davon, dass unser Konstruktionsverfahren

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

liefert. Damit erhält man aus (1.23) die einfache Rechenvorschrift

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (1.25)$$

Sie gilt nur in Koordinaten einer **positiv orientierten Orthonormalbasis**. Zur praktischen Berechnung des Vektorproduktes $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ mit (1.25) schreibt man das Vektorprodukt zweckmäßigerweise mit Spaltenvektoren an,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

und verwendet folgende Regel: „ z_1 ergibt sich als x_2 mal y_3 (entlang der Hauptdiagonalen) minus y_2 mal x_3 (entlang der Nebendiagonalen)“. Die Koordinaten z_2 und z_3 erhält man in analoger Weise durch zyklische Anwendung der Regel.

1.6 Mehrfache Vektorprodukte

1.6.1 Das Spatprodukt

Skalar- und Vektorprodukt lassen sich zum sogenannten *Spatprodukt*

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$$

vereinigen. Es kann gezeigt werden, dass das Spatprodukt den sogenannten *orientierten Inhalt* des von \vec{x} , \vec{y} und \vec{z} aufgespannten Parallelepipeds gibt. Für den Betrag des Spatproduktes gilt

$$|(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}| = \|\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\|. \quad (1.26)$$

Falls die drei Vektoren linear abhängig sind, beträgt der Inhalt des Parallelepipeds Null, und das Spatprodukt verschwindet. Anschaulich liegen die drei Vektoren in diesem Fall in einer Ebene, sie sind dann *komplanar*. Das ist beispielsweise dann der Fall, wenn zwei der drei Vektoren parallel sind.

Falls die drei Vektoren linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ des Vektorraums V . Falls die Basis positiv orientiert ist, ergibt sich ein positives Spatprodukt, ansonsten ein negatives.

Aus dem Gesagten ergibt sich, dass die Reihenfolge der Faktoren im Spatprodukt höchstens das Vorzeichen beeinflusst. Das Spatprodukt ändert sich nicht, wenn man die drei Vektoren zyklisch vertauscht, weil dadurch die Orientierung erhalten bleibt. Es gilt also

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y} = (\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}. \quad (1.27)$$

Zur Berechnung des Spatproduktes, ausgehend von Koordinaten einer **positiv orientierten Orthonormalbasis**, kann man die Berechnungsvorschriften (1.18) und (1.25) miteinander kombinieren. Man erhält

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

oder zusammengefasst

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (1.28)$$

1.6.2 Das doppelte Vektorprodukt

Betrachten wir noch das doppelte Vektorprodukt

$$\vec{p} = \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}).$$

Bei ihm ist es zunächst einmal nicht gleichgültig, wie die Klammern gesetzt werden. Das kann man sich anschaulich leicht klar machen. Da der Vektor $\vec{q} = \vec{y} \times \vec{z}$ auf der von \vec{y} und \vec{z} aufgespannten Ebene senkrecht steht, \vec{p} aber senkrecht steht auf \vec{q} (und natürlich auf \vec{x}), muss \vec{p} in der von \vec{y} und \vec{z} aufgespannten Ebene liegen. Der Vektor

$$\vec{p}^* = (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$$

liegt konsequenterweise in der von \vec{x} und \vec{y} aufgespannten Ebene, kann also im allgemeinen nicht mit \vec{p} identisch sein.

Das doppelte Kreuzprodukt lässt sich mit Hilfe von Skalarprodukten ausdrücken. Wir behandeln zunächst den Fall, dass \vec{y} und \vec{z} linear unabhängig sind. Dann bilden $(\vec{q}, \vec{y}, \vec{z})$ eine positiv orientierte Basis von V , so dass wir \vec{p} in der Form

$$\vec{p} = a\vec{q} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

darstellen können. Multipliziert man die Gleichung skalar mit \vec{q} und berücksichtigt, dass \vec{q} einerseits orthogonal zu \vec{p} und andererseits orthogonal zu \vec{y} und \vec{z} ist, bekommt man

$$0 = a |\vec{q}|^2,$$

woraus $a = 0$ folgt. Der Vektor \vec{p} lässt sich also als Linearkombination von \vec{y} und \vec{z} darstellen, wie oben behauptet. Multipliziert man hingegen die Gleichung skalar mit \vec{x} , und berücksichtigt, dass \vec{x} orthogonal zu \vec{p} ist, erhält man

$$0 = b\vec{x} \cdot \vec{y} + c\vec{x} \cdot \vec{z}.$$

Die Lösung $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ dieser Gleichung lässt sich mit einem reellen Parameter t in der Form

$$b = t(\vec{x} \cdot \vec{z}), \quad c = -t(\vec{x} \cdot \vec{y})$$

schreiben. Insgesamt ist also

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = t((\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}).$$

Linke und rechte Seite dieser Gleichung sind trilineare Abbildungen $V \times V \times V \rightarrow V$, das heißt sie sind linear bezüglich jedem der drei Faktoren \vec{x} , \vec{y} und \vec{z} . Solche Abbildungen sind aufgrund der Linearität identisch, wenn sie auf den Elementen einer beliebig gewählten Basis von V identisch sind. Wir wählen eine positiv orientierte Orthonormalbasis. Von den 27 möglichen Fällen, die drei Basisvektoren

als Faktoren zu wählen, entfallen neun Fälle, bei denen $\vec{y} = \vec{z}$ ist und deshalb beide Seiten verschwinden. Die verbleibenden 18 Fälle reduzieren sich auf neun, weil beide Seiten alternierend in \vec{y} und \vec{z} sind. Wenn drei verschiedene Basisvektoren eingesetzt werden, verschwinden beide Seiten der Gleichung, was weitere drei Fälle eliminiert. Die restlichen sechs Fälle zerfallen in zwei Dreiergruppen, die durch zyklische Vertauschung auseinander hervorgehen. Letztlich sind deshalb nur die Fälle

$$\vec{x} = \vec{y} = \vec{e}_1, \quad \vec{z} = \vec{e}_2 \quad \text{oder} \quad \vec{z} = \vec{e}_3$$

zu untersuchen. Beide Fälle führen auf $t = 1$. Die Beziehung

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{z} \tag{1.29}$$

nennt man den *Entwicklungssatz*. Falls \vec{y} und \vec{z} linear abhängig sind, verschwinden beide Seiten von (1.29), wie es sein muss.

Kapitel 2

Felder und Koordinatensysteme

2.1 Euklidisch-affiner Raum E_3

Als Modell für den physikalischen Raum wählen wir den dreidimensionalen *Euklidisch-affinen Raum* E_3 .

Affine Struktur:

- Der Euklidisch-affine Raum E_3 besteht aus einer Menge von Punkten $\{P, Q, R, \dots\}$ und einem Vektorraum V_3 .
- Je zwei Punkte P, Q definieren einen Vektor $\vec{r}_{PQ} \in V_3$.
- Ein Punkt P und ein Vektor $\vec{r}_{PQ} \in V_3$ definieren einen Punkt Q .
- Für drei Punkte P, Q, R gilt: $\vec{r}_{PQ} + \vec{r}_{QR} + \vec{r}_{RP} = 0$.

Euklidische Struktur:

- Der Vektorraum V_3 wird mit einem Skalarprodukt versehen.
- Dadurch ist der Abstand zwischen zwei Punkten erklärt,

$$d(P, Q) = \sqrt{\vec{r}_{PQ} \cdot \vec{r}_{PQ}}.$$

- Dadurch ist der Winkel zwischen drei Punkten erklärt.

Der Raum E_3 wird zusätzlich mit einer Orientierung versehen, das heißt mit einem Schraubsinn. Wir vereinbaren, dass dem Raum E_3 der Rechtsschraubsinn zugeordnet wird.

2.2 Ortsvektor und kartesische Koordinaten

Ein *Koordinatensystem* dient zur quantitativen Beschreibung der Lage von Punkten. Ein *kartesisches Koordinatensystem* wird folgendermaßen eingeführt:

- Ein Punkt O wird als Ursprung ausgezeichnet und der Vektorraum V_3 wird mit einer positiv orientierten Orthonormalbasis $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ versehen, das heißt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ für $i, j = x, y, z$. Durch diese Festlegung entspricht der Rechtsschraubsinn des E_3 der Klasse der positiv orientierten Basen.
- Dann ist jeder Punkt P durch seinen Ortsvektor $\vec{r}_P = \vec{r}_{OP}$ in umkehrbar eindeutiger Weise gekennzeichnet. Deshalb können wir nach Wahl eines Ursprungs Punkte mit ihren Ortsvektoren identifizieren.
- Der Ortsvektor wird in der Form

$$\vec{r}_P = x_P \vec{e}_x + y_P \vec{e}_y + z_P \vec{e}_z$$

bezüglich der Basis dargestellt. Dadurch werden jedem Punkt P seine kartesischen Koordinaten (x_P, y_P, z_P) zugeordnet.

In der elektromagnetischen Feldtheorie redet man häufig vom *Aufpunkt* P und vom *Quellpunkt* Q und setzt

$$\vec{r} = \vec{r}_P, \quad \vec{r}' = \vec{r}_Q, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = \vec{r}_{QP}.$$

Mit Aufpunkt ist jener Punkt gemeint, in dem das elektromagnetische Feld berechnet werden soll. Am Quellpunkt sind Ursachen zu finden, wie zum Beispiel Ladungen oder Ströme, die zu dem Feld im Aufpunkt beitragen.

2.3 Skalare Felder und Vektorfelder

2.3.1 Der Feldbegriff

Offensichtlich spielt in der elektromagnetischen Feldtheorie der Begriff des Feldes eine zentrale Rolle. Unter einem Feld versteht man eine physikalische Größe, die an verschiedenen Punkten im Raum verschiedene Werte annehmen kann. Weiterhin darf das Feld auch von der Zeit abhängig sein. Im Rahmen dieser Vorlesung wollen wir uns jedoch auf die Ortsabhängigkeit der Felder konzentrieren. Die Zeit spielt dabei die Rolle eines universellen reellen Parameters und wird zunächst außer Acht gelassen.

Je nachdem, ob die betrachtete Größe skalarer oder vektorieller Natur ist, spricht man von einem *skalaren Feld* oder einem *Vektorfeld*. Gehen wir von einem Teilgebiet Ω des E_3 aus, auf dem die Felder definiert sein sollen. Ein skalares Feld φ ordnet jedem Punkt \vec{r} aus Ω eine reelle Zahl zu,

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \vec{r} \mapsto \varphi(\vec{r}). \quad (2.1)$$

Bei einem Vektorfeld stellt sich die Frage, in welchen Vektorraum das Feld abbildet. Der Feldvektor ist in seinem jeweiligen Aufpunkt verankert. Um dies zum Ausdruck zu bringen, wird jedem Punkt P aus Ω ein eigenständiger Vektorraum angeheftet. Dieser Vektorraum heißt *Tangentialraum* $T_P\Omega$ an Ω im Punkt P . Der Begriff Tangentialraum wird im Zusammenhang mit den krummlinigen Koordinatensystemen noch deutlicher werden. Ein Vektorfeld \vec{a} ordnet jedem Punkt \vec{r} aus Ω einen Vektor aus der Gesamtheit aller Tangentialräume zu,

$$\vec{a} : \Omega \rightarrow \bigcup_{P \in \Omega} T_P\Omega : \vec{r} \mapsto \vec{a}(\vec{r}). \quad (2.2)$$

2.3.2 Komponenten und Koordinaten

Um mit Komponenten und Koordinaten eines Vektorfeldes arbeiten zu können, wird in jedem Punkt P , in dem das Feld definiert ist, eine Basis des Tangentialraumes benötigt, das heißt ein *Basisfeld*.

Aus der im Abschnitt 2.2 eingeführten positiv orientierten Orthonormalbasis $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lässt sich durch Parallelverschiebung ein für den ganzen Raum konstantes Basisfeld erzeugen. Wir sprechen in diesem Fall von einem *kartesischen Basisfeld*.

Für ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ hat man dann

$$\vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{e}_x + a_y(\vec{r})\vec{e}_y + a_z(\vec{r})\vec{e}_z.$$

Hierin werden $a_x(\vec{r})$, $a_y(\vec{r})$ und $a_z(\vec{r})$ als *kartesische Koordinaten* des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ bezeichnet. Die Vektorfelder $a_x(\vec{r})\vec{e}_x$, $a_y(\vec{r})\vec{e}_y$ und $a_z(\vec{r})\vec{e}_z$ nennt man im Gegensatz dazu die *kartesischen Komponenten* des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$.

Nach Einführung eines eines kartesischen Basisfeldes ordnet das Vektorfeld jedem Punkt \vec{r} aus Ω seine Koordinaten in der Form

$$\vec{a}^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{r} \mapsto (a_x(\vec{r}), a_y(\vec{r}), a_z(\vec{r})). \quad (2.3)$$

zu. Ginge man zu einem anderen Basisfeld über, führte ein- und dasselbe Vektorfeld \vec{a} auf eine unterschiedliche Darstellung \vec{a}^* in Koordinaten. In den Anwendungen wird häufig nicht präzise zwischen dem Vektorfeld \vec{a} und seiner Koordinatendarstellung unterschieden. Man muss sich dann stets darüber im Klaren sein, auf welches Basisfeld sich die Koordinatendarstellung bezieht.

Die Differenzierbarkeitsklasse eines Vektorfeldes folgt aus der Differenzierbarkeit seiner Koordinatenfunktionen. Zum Beispiel heißt ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ *stetig differenzierbar*, wenn seine Koordinatenfunktionen $a_x(\vec{r})$, $a_y(\vec{r})$ und $a_z(\vec{r})$ stetig differenzierbar sind.

2.4 Krummlinige Koordinatensysteme

2.4.1 Allgemeine krummlinige Koordinatensysteme

Es seien (x, y, z) kartesische Koordinaten eines Punktes P im Raum E_3 und

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3) \quad (2.4)$$

drei eindeutige und stetig differenzierbare Funktionen, die auf einem gewissen Bereich $(u_1, u_2, u_3) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$ definiert sind. Der Ortsvektor eines Punktes P lässt sich damit als

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(x, y, z) \\ &= \tilde{\vec{r}}(u_1, u_2, u_3) \\ &= x(u_1, u_2, u_3)\vec{e}_x + y(u_1, u_2, u_3)\vec{e}_y + z(u_1, u_2, u_3)\vec{e}_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

darstellen. Mit $\vec{r}(x, y, z)$ ist die Abbildung gemeint, die den kartesischen Koordinaten (x, y, z) einen Ortsvektor zuordnet. Die Abbildung $\tilde{\vec{r}}(u_1, u_2, u_3)$ ordnet hingegen den Koordinaten (u_1, u_2, u_3) einen Ortsvektor zu. Wenn die Koordinaten dem Zusammenhang (2.4) genügen, führen beide Abbildungen auf denselben Ortsvektor.

Koordinatenlinien entstehen dadurch, dass man zwei der drei Koordinaten (u_1, u_2, u_3) festhält und die dritte Koordinate ein Intervall durchläuft. Die Koordinatenlinien besitzen damit folgende Parameterdarstellungen.

$$\begin{aligned} u_1\text{-Linien:} & \quad u_1 \mapsto \vec{r}(u_1, c_2, c_3), \quad a_1 \leq u_1 \leq b_1, \\ u_2\text{-Linien:} & \quad u_2 \mapsto \vec{r}(c_1, u_2, c_3), \quad a_2 \leq u_2 \leq b_2, \\ u_3\text{-Linien:} & \quad u_3 \mapsto \vec{r}(c_1, c_2, u_3), \quad a_3 \leq u_3 \leq b_3, \end{aligned}$$

mit den Konstanten c_1, c_2, c_3 . Es handelt sich jeweils um zweiparametrische Linienscharen. Wir verlangen, dass durch jeden Punkt P genau eine u_1 -, eine u_2 - und eine u_3 -Linie geht, Abb. 2.1. Dann ist der durch das Gleichungssystem (2.4) vermittelte Zusammenhang zwischen den (x, y, z) - und den (u_1, u_2, u_3) -Koordinaten umkehrbar eindeutig, wird also durch eine *bijektive Abbildung* vermittelt.

Man nennt das Koordinatensystem (u_1, u_2, u_3) *krummlinig*, wenn mindestens eine der drei Scharen von Koordinatenlinien gekrümmte Linien enthält.

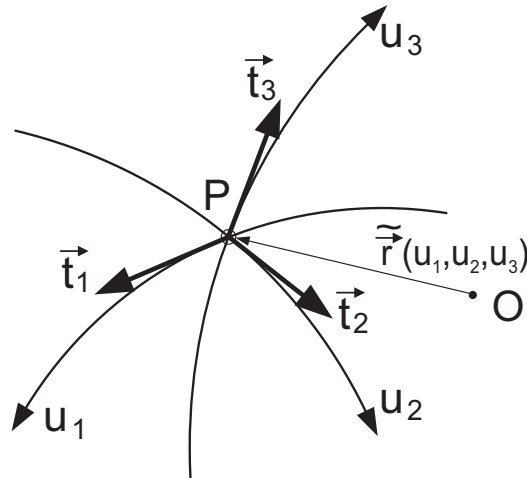


Bild 2.1: Krummlinige Koordinaten (u_1, u_2, u_3) . Durch jeden Punkt P geht genau eine u_1 -, eine u_2 - und eine u_3 -Linie.

Koordinatenflächen sind die Flächen, auf denen je eine der drei Koordinaten u_1, u_2, u_3 konstant ist. Die Koordinatenflächen bilden ein Flächensystem, das aus drei einparametrischen Flächenscharen besteht.

Ein Koordinatensystem ist mit einem *natürlichen Basisfeld* verknüpft, welches jedem Punkt P aus E_3 die Tangentenvektoren

$$\vec{t}_i(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = \frac{\partial x(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} \vec{e}_x + \frac{\partial y(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} \vec{e}_y + \frac{\partial z(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} \vec{e}_z \quad (2.6)$$

zuordnet, $i = 1, \dots, 3$. Die Tangentenvektoren sind im Sinne zunehmender Werte der Koordinaten (u_1, u_2, u_3) gerichtet, Abb. 2.1. Wir hatten vorausgesetzt, dass der Zusammenhang zwischen den (x, y, z) - und den (u_1, u_2, u_3) -Koordinaten umkehrbar eindeutig ist. Daraus folgt, dass die drei Tangentenvektoren (2.6) linear unabhängig sind, wie man zeigen kann. In jedem Punkt P ist deshalb $(\vec{t}_1(\vec{r}), \vec{t}_2(\vec{r}), \vec{t}_3(\vec{r}))$ eine Basis des Tangentialraums $T_P E_3$.

Nachfolgend beschränken wir uns auf *orthogonale* Koordinatensysteme. Das Koordinatensystem (u_1, u_2, u_3) heißt orthogonal, wenn sich die Koordinatenlinien in jedem Punkt P aus E_3 paarweise senkrecht schneiden. Das hat zur Folge, dass die Basisvektoren $\vec{t}_1(\vec{r}), \vec{t}_2(\vec{r}), \vec{t}_3(\vec{r})$ paarweise orthogonal sind,

$$\vec{t}_i(\vec{r}) \cdot \vec{t}_j(\vec{r}) = g_i^2(\vec{r}) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 3. \quad (2.7)$$

Die *Maßstabskoeffizienten* $g_i(\vec{r})$ geben die Beträge der Vektoren $\vec{t}_i(\vec{r})$, $g_i(\vec{r}) = |\vec{t}_i(\vec{r})|$. Wir setzen noch voraus, dass die Basis $(\vec{t}_1(\vec{r}), \vec{t}_2(\vec{r}), \vec{t}_3(\vec{r}))$ in jedem Punkt P aus E_3 positiv orientiert sein soll. Das kann gegebenenfalls durch Ummummierung der Koordinaten erreicht werden.

Durch Normierung der Vektoren $\vec{t}_i(\vec{r})$ bekommt man ein positiv orientiertes orthonormales Basisfeld $(\vec{e}_1(\vec{r}), \vec{e}_2(\vec{r}), \vec{e}_3(\vec{r}))$ mit

$$\vec{e}_i(\vec{r}) = \frac{\vec{t}_i(\vec{r})}{g_i(\vec{r})}, \quad i = 1, \dots, 3. \quad (2.8)$$

Obwohl die Basisvektoren im allgemeinen ortsabhängig sind, besitzen Skalar- und Kreuzprodukt zweier Vektorfelder in Koordinaten des Basisfeldes $(\vec{e}_1(\vec{r}), \vec{e}_2(\vec{r}), \vec{e}_3(\vec{r}))$ die einfache Form (1.18) beziehungsweise (1.25).

Wir wollen noch das Transformationsgesetz für die Koordinaten eines Vektorfeldes beim Übergang vom kartesischen Basisfeld $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ zum Basisfeld $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ herleiten, wobei wir die Abhängigkeit vom Ortsvektor \vec{r} in der Notation unterdrücken. Dazu setzen wir $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ sowie $\vec{e}_1 = \vec{e}_x, \vec{e}_2 = \vec{e}_y, \vec{e}_3 = \vec{e}_z$. Damit lässt sich (2.5) in der kompakteren Form

$$\vec{r}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{j=1}^3 x_j(u_1, u_2, u_3) \vec{e}_j$$

schreiben. Wir multiplizieren (1.7) skalar mit \vec{e}_k und machen von der Orthonormalität der Basis Gebrauch,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \sum_{j=1}^3 T_{ij} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \sum_{j=1}^3 T_{ij} \delta_{jk} = T_{ik}.$$

Also ist mit (2.6) und (2.8)

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \vec{e}_i \cdot \frac{1}{g_k} \vec{t}_k \\ &= \vec{e}_i \cdot \frac{1}{g_k} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} = \vec{e}_i \cdot \frac{1}{g_k} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_k} \vec{e}_j \\ &= \frac{1}{g_k} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_k} \delta_{ij} = \frac{1}{g_k} \frac{\partial x_i(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_k}, \end{aligned}$$

oder nach Umbenennung des Index k in j

$$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{1}{g_j}. \quad (2.9)$$

Das gesuchte Transformationsgesetz ist dann durch (1.9) gegeben.

2.4.2 Kreiszyylinder-Koordinatensystem

Bei den *Kreiszyylinder-Koordinaten* oder kurz *Zylinderkoordinaten* beschreibt man die räumliche Lage eines Punktes durch die Koordinaten (ρ, φ, z) , wie in Abb. 2.2 dargestellt. Das Zylinderkoordinatensystem ist eine Erweiterung des ebenen Polarkoordinatensystems.

Die krummlinigen outhogonalen Koordinaten sind

$$u_1 = \rho, \quad u_2 = \varphi, \quad u_3 = z.$$

Alle Punkt des Raumes werden erfasst durch den Wertebereich

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) ist

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Die drei Koordinatenflächen sind Kreiszylindermäntel $\rho = c_1$, Halbebenen $\varphi = c_2$ und Ebenen $z = c_3$. Die drei Koordinatenlinien als Schnittkurven je zweier Koordinatenflächen sind aus Tabelle 2.1 ersichtlich.

Für die Tangentenvektoren erhält man aus (2.6)

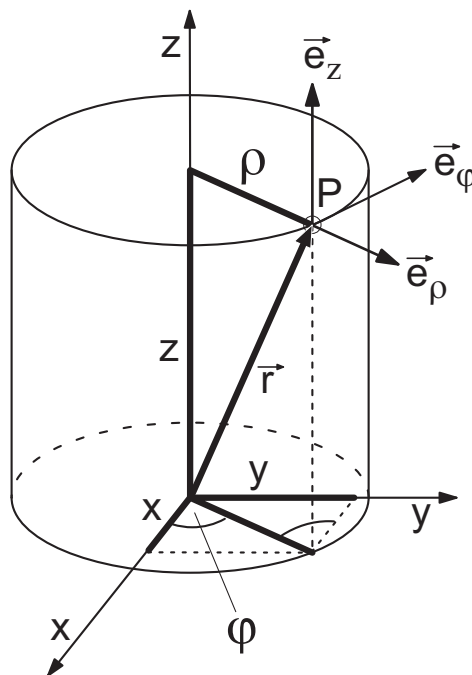


Bild 2.2: Zylinderkoordinaten

Tabelle 2.1: Koordinatenlinien beim Kreiszyylinder-Koordinatensystem

Koordinatenlinie	Sich schneidende Koordinatenflächen	Beschreibung
ρ -Linie	$\varphi = c_2, z = c_3$	Radialer Strahl in der Ebene $z = c_3$ mit dem Winkel $\varphi = c_2$ gegen die x -Achse.
φ -Linie	$\rho = c_1, z = c_3$	Kreis vom Radius $\rho = c_1$ in der Ebene $z = c_3$.
z -Linie	$\rho = c_1, \varphi = c_2$	Parallele zur z -Achse auf dem Mantel des Kreiszyinders $\rho = c_1$ und der Halbebene $\varphi = c_2$.

$$\begin{aligned}\vec{t}_1 &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \\ \vec{t}_2 &= -\rho \sin \varphi \vec{e}_x + \rho \cos \varphi \vec{e}_y, \\ \vec{t}_3 &= \vec{e}_z,\end{aligned}$$

für die Maßstabskoeffizienten

$$g_1 = 1, \quad g_2 = \rho, \quad g_3 = 1.$$

Für $\rho = 0$ ist $g_2 = 0$, so dass die drei Tangentenvektoren nicht mehr linear unabhängig sind. Das rührt daher, dass sich die ρ -Linien auf der z -Achse schneiden, so dass dort keine umkehrbar eindeutige Abbildung gegeben ist. Das Zylinderkoordinatensystem bricht auf der z -Achse zusammen und ist dort zur Beschreibung von Vektorfeldern im allgemeinen nicht geeignet.

Durch Normierung der Tangentenvektoren entsteht das Basisfeld

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \vec{e}_1 = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \\ \vec{e}_\varphi &= \vec{e}_2 = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y, \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_3 = \vec{e}_z\end{aligned}$$

und die Transformationsmatrix

$$(T_{ij}) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit (1.9) erhält man das Transformationsgesetz für die Koordinaten eines Vektorfeldes \vec{a} beim Übergang von kartesischen Koordinaten (a_x, a_y, a_z) zu Zylinderkoordinaten (a_ρ, a_φ, a_z)

$$a_\rho = a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi,$$

$$a_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi,$$

$$a_z = a_z,$$

beziehungsweise umgekehrt

$$a_x = a_\rho \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi,$$

$$a_y = a_\rho \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi,$$

$$a_z = a_z.$$

2.4.3 Kugelkoordinaten

Bei den *Kugelkoordinaten* beschreibt man die räumliche Lage eines Punktes durch die Koordinaten (r, ϑ, φ) , wie in Abb. 2.3 dargestellt. Dabei ist r der Abstand vom Ursprung, ϑ der Winkel, den \vec{r} mit der z -Achse bildet, und φ der Winkel, den die Projektion von \vec{r} in die x - y -Ebene mit der x -Achse bildet. Es sei noch erwähnt, dass man beim Kugelkoordinatensystem der Erde die geographische Breite ϑ anders als hier vom Äquator aus zählt.

Die krummlinigen outhogonalen Koordinaten sind

$$u_1 = r, \quad u_2 = \vartheta, \quad u_3 = \varphi.$$

Alle Punkt des Raumes werden erfasst durch den Wertebereich

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

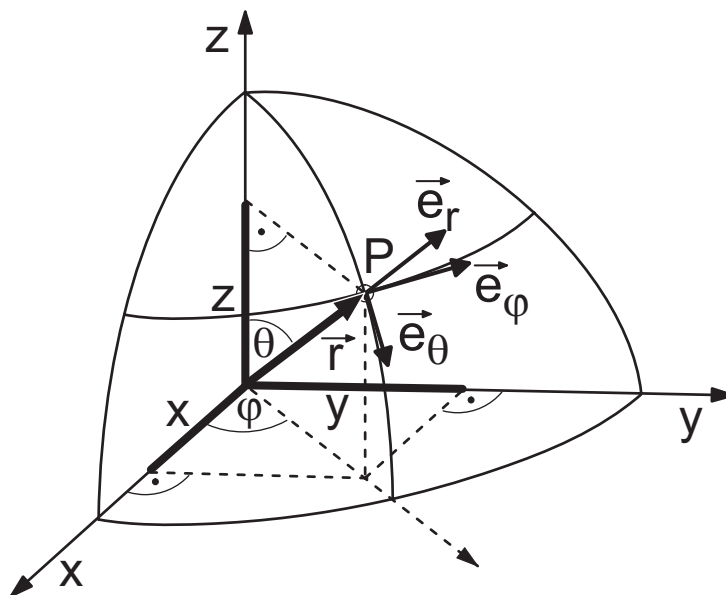


Bild 2.3: Kugelkoordinaten

Tabelle 2.2: Koordinatenlinien beim Kugelkoordinatensystem

Koordinatenlinie	Sich schneidende Koordinatenflächen	Beschreibung
r -Linie	$\vartheta = c_2, \varphi = c_3$	Radialer Strahl als Schnittgerade des Kegelmantels $\vartheta = c_2$ mit der Halbebene $\varphi = c_3$.
ϑ -Linie	$r = c_1, \varphi = c_3$	Längenkreis auf der Kugeloberfläche vom Radius $r = c_1$ und auf der Halbebene $\varphi = c_3$.
φ -Linie	$r = c_1, \vartheta = c_2$	Breitenkreis vom Radius $r \sin \vartheta$ auf der Kugeloberfläche $r = c_1$.

Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) ist

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

Die drei Koordinatenflächen sind Kugeloberflächen $r = c_1$, Kreiskegelmäntel $\vartheta = c_2$ und Halbebenen $\varphi = c_3$. Die drei Koordinatenlinien als Schnittkurven je zweier Koordinatenflächen sind aus Tabelle 2.2 ersichtlich.

Für die Tangentenvektoren erhält man aus (2.6)

$$\begin{aligned} \vec{t}_1 &= \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z, \\ \vec{t}_2 &= r \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + r \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y - r \sin \vartheta \vec{e}_z, \\ \vec{t}_3 &= -r \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_x + r \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_y, \end{aligned}$$

für die Maßstabskoeffizienten

$$g_1 = 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = r \sin \vartheta.$$

Für $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ ist $g_3 = 0$, so dass die drei Tangentenvektoren nicht mehr linear unabhängig sind. Das rührt daher, dass sich die ϑ -Linien in den beiden Polen der Kugel schneiden, so dass dort keine umkehrbar eindeutige Abbildung gegeben ist. Das Kugelkoordinatensystem bricht in den Polen der Kugel zusammen und ist dort zur Beschreibung von Vektorfeldern im allgemeinen nicht geeignet.

Durch Normierung der Tangentenvektoren entsteht das Basisfeld

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \tilde{e}_1 = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\vartheta &= \tilde{e}_2 = \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\varphi &= \tilde{e}_3 = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y\end{aligned}$$

und die Transformationsmatrix

$$\left(T_{ij}\right) = \left(\vec{e}_i \cdot \tilde{e}_j\right) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit (1.9) erhält man das Transformationsgesetz für die Koordinaten eines Vektorfeldes \vec{a} beim Übergang von kartesischen Koordinaten (a_x, a_y, a_z) zu Kugelkoordinaten $(a_r, a_\vartheta, a_\varphi)$

$$\begin{aligned}a_r &= a_x \sin \vartheta \cos \varphi + a_y \sin \vartheta \sin \varphi + a_z \cos \vartheta, \\ a_\vartheta &= a_x \cos \vartheta \cos \varphi + a_y \cos \vartheta \sin \varphi - a_z \sin \vartheta, \\ a_\varphi &= -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi,\end{aligned}$$

beziehungsweise umgekehrt

$$\begin{aligned}a_x &= a_r \sin \vartheta \cos \varphi + a_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi, \\ a_y &= a_r \sin \vartheta \sin \varphi + a_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi, \\ a_z &= a_r \cos \vartheta - a_\vartheta \sin \vartheta.\end{aligned}$$

2.4.4 Beispiele

Beispiel 1: Umrechnung Zylinderkoordinaten in kartesische Koordinaten

Gegeben ist das magnetostatische Feld eines Linienstromes entlang der z -Achse. In Zylinderkoordinaten lautet das Feld

$$H_\varphi(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi\rho}.$$

Wie lautet das Feld in kartesischen Koordinaten?

Aus der entsprechenden Transformationsformel erhält man

$$H_x = -H_\varphi \sin \varphi = -\frac{I}{2\pi\rho} \sin \varphi,$$

$$H_y = H_\varphi \cos \varphi = \frac{I}{2\pi\rho} \cos \varphi,$$

$$H_z = 0,$$

was man sich auch elementargeometrisch sofort klar machen kann. Man beachte, dass die Koordinaten des Vektorfeldes damit vom Basisfeld $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ auf das kartesische Basisfeld $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ umgerechnet wurden. Die Koordinaten des Ortsvektors sind immer noch Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) . Um diese ebenfalls umzurechnen, muss man von den Beziehungen

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

Gebrauch machen. Daraus folgt

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2$$

und damit

$$H_x(\vec{r}) = -\frac{I}{2\pi} \frac{y}{\rho^2} = -\frac{I}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$H_y(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi} \frac{x}{\rho^2} = \frac{I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$H_z(\vec{r}) = 0.$$

Vergleicht man das Resultat mit der ursprünglichen Beziehung, wird deutlich, dass Zylinderkoordinaten zur Beschreibung des Feldes besser geeignet sind.

Beispiel 2: Umrechnung kartesische Koordinaten in Kugelkoordinaten

Das skalare elektrische Potential eines z -gerichteten Punktdipols im Ursprung lautet

$$V(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

Das Potential wurde hier mit V bezeichnet, um Verwechslungen mit dem Winkel φ auszuschließen. Es soll das elektrische Feld in Kugelkoordinaten berechnet werden.

Für das elektrische Feld gilt

$$\vec{E} = -\text{grad } V,$$

also

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5},$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^5},$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3z^2}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^5} - \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} \right)$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^5}.$$

Es empfiehlt sich, zunächst die Koordinaten des Ortsvektors mit

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

umzurechnen. Hieraus folgt

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

und damit

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} 3 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi,$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} 3 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi,$$

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 - 3 \sin^2 \vartheta).$$

Schließlich rechnen wir noch die Koordinaten des Vektorfeldes um,

$$E_r(\vec{r}) = E_x \sin \vartheta \cos \varphi + E_y \sin \vartheta \sin \varphi + E_z \cos \vartheta$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi + 2 \cos \vartheta$$

$$- 3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta)$$

$$= \frac{2p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E_\vartheta(\vec{r}) = E_x \cos \vartheta \cos \varphi + E_y \cos \vartheta \sin \varphi - E_z \sin \vartheta$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + 3 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi - 2 \sin \vartheta + 3 \sin^3 \vartheta)$$

$$= \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E_\varphi(\vec{r}) = -E_x \sin \varphi + E_y \cos \varphi$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-3 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + 3 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi)$$

= 0.

Dieses Vorgehen führt auf eine umständliche und unübersichtliche Rechnung. Gibt es eine andere Rechenmethode, die mit geringerem Aufwand zum selben Ergebnis führt? Dazu schreiben wir das vorgegebene Potential in Kugelkoordinaten um,

$$V(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\vartheta}{r^2}.$$

In Abschnitt 4.1 werden wir sehen, dass für den Gradient in Kugelkoordinaten gilt

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

Diese Beziehung kann man auch aus Formelsammlungen entnehmen. Damit findet man

$$\begin{aligned} E_r(\vec{r}) &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \\ E_\vartheta(\vec{r}) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \\ E_\varphi(\vec{r}) &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

Daraus kann man lernen, dass Kugelkoordinaten zur Beschreibung des Feldes eines Punktdipols wesentlich besser geeignet sind als kartesische Koordinaten. Aus diesem Grund sollte der Übergang zu den Kugelkoordinaten so früh wie möglich durchgeführt werden. Dann können alle Rechenschritte mühelos in den problemangepassten Koordinaten ausgeführt werden.

Kapitel 3

Kurven, Flächen und räumliche Gebiete

3.1 Kurven in E_3

Wir betrachten Kurven in der Form

$$C : [a, b] \rightarrow E_3 : u \mapsto \vec{r} = \vec{r}(u). \quad (3.1)$$

Hierbei wird der Ortsvektor der Kurvenpunkte als Funktion eines Parameters u dargestellt. Deutet man den Parameter u als Zeit, so beschreibt (3.1) die Bewegung eines Punktes mit C als Bahnkurve. Durchläuft u das Parameterintervall $[a, b]$, so durchläuft $\vec{r}(u)$ die Kurve C . Da die Durchlaufgeschwindigkeit beliebig gewählt werden kann, besitzt jede Kurve unendlich viele Parameterdarstellungen.

Durch die Wahl einer Parameterdarstellung (3.1) wird auf C ein *Durchlaufsin* – man sagt auch: eine Orientierung – festgelegt. Insbesondere bezeichnet man $\vec{r}(a)$ und $\vec{r}(b)$ als Anfangs- und Endpunkt der *orientierten Kurve* C . Die aus den gleichen Punkten wie C bestehende, aber umgekehrt orientierte Kurve wird mit $-C$ bezeichnet. Ist $\vec{r} = \vec{r}(u)$, $a \leq u \leq b$ eine Parameterdarstellung von C , so ist $\vec{r} = \tilde{\vec{r}}(u) = \vec{r}(a + b - u)$, $a \leq u \leq b$ eine Parameterdarstellung von $-C$.

Eine Kurve C heißt *geschlossen*, wenn Anfangs- und Endpunkt von C zusammenfallen, ansonsten heißt sie *offen*. Der *Rand* ∂C einer offenen Kurve besteht aus dem Anfangspunkt P_1 und dem Endpunkt P_2 , das heißt $\partial C = \{P_1, P_2\}$. Der Rand einer geschlossenen Kurve ist leer, $\partial C = \emptyset$.

Eine Kurve heißt *doppelpunktfrei*, wenn es eine Parameterdarstellung $\vec{r} = \vec{r}(u)$, $a \leq u \leq b$ gibt, so dass $\vec{r}(u_1) \neq \vec{r}(u_2)$ für alle $u_1 \neq u_2$ gilt, mit $a < u_1, u_2 < b$. Die Punkte $\vec{r}(a)$ und $\vec{r}(b)$ dürfen übereinstimmen; sonst sind Überschneidungen und Berührungen ausgeschlossen.

Eine Kurve C heißt *stetig differenzierbar*, wenn es eine Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \vec{r}(u), \quad a \leq u \leq b \quad (3.2)$$

gibt, die stetig differenzierbar ist und für die

$$\vec{t}(u) = \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} \neq 0 \quad \text{für alle } u \in [a, b] \quad (3.3)$$

gilt. Der Vektor $\vec{t}(u)$ heißt *Tangentenvektor* an C im Punkt $\vec{r}(u)$. Ist C geschlossen, so wird zusätzlich noch $\vec{t}(a) = \vec{t}(b)$ gefordert. Jede solche Parameterdarstellung wird als *zulässig* bezeichnet. C heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn C sich aus endlich vielen aneinander anschließenden stetig differenzierbaren Kurven zusammensetzt.

Aus (3.3) folgt, dass eine stetig differenzierbare Kurve in jedem Punkt $\vec{r}(u)$ eine eindeutige Tangentenrichtung

$$\vec{t}_0(u) = \frac{\vec{t}(u)}{|\vec{t}(u)|}$$

besitzt, die durch den *Tangenteneinheitsvektor* $\vec{t}_0(u)$ gegeben ist. Man kann zeigen, dass die Tangentenrichtung unabhängig von der Wahl der zulässigen Parameterdarstellung ist. Die Tangentenrichtung ist daher eine geometrische Eigenschaft der Kurve.

Die Gleichung

$$T_u : \quad \vec{r}(v) = \vec{r}(u) + v\vec{t}(u), \quad -\infty < v < \infty$$

ist eine Parameterdarstellung der *Tangente* T_u an C im Punkt $\vec{r}(u)$. Die Menge der Punkte auf der Tangente bildet einen *affinen Teilraum* des E_3 .

Ortsvektor und Tangentenvektor können in Koordinaten bezüglich einer Basis in Komponenten zerlegt werden. Zum Beispiel hat man in kartesischen Koordinaten $(x(u), y(u), z(u))$

$$\begin{aligned} \vec{r}(u) &= x(u)\vec{e}_x + y(u)\vec{e}_y + z(u)\vec{e}_z, \\ \vec{t}(u) &= \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} = \frac{dx(u)}{du}\vec{e}_x + \frac{dy(u)}{du}\vec{e}_y + \frac{dz(u)}{du}\vec{e}_z. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die kartesischen Koordinaten des Tangentenvektors $\vec{t}(u)$ können durch Differentiation der kartesischen Koordinaten des Ortsvektors $\vec{r}(u)$ nach dem Parameter u gewonnen werden. **Dieser Zusammenhang gilt nur in kartesischen Koordinaten.** Verwendet man ein anderes Koordinatensystem, so ist zu beachten, dass

die Basisvektoren im allgemeinen ortsabhängig sind und deshalb mitdifferenziert werden müssen. Bei der Berechnung des Tangentenvektors $\vec{t}(u)$ in anderen als in kartesischen Koordinaten ist deshalb Vorsicht geboten. So hat man zum Beispiel in Zylinderkoordinaten $(\rho(u), \varphi(u), z(u))$

$$\begin{aligned}\vec{r}(u) &= \rho(u)\vec{e}_\rho(\varphi(u)) + z(u)\vec{e}_z, \\ \vec{t}(u) &= \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} \\ &= \frac{d\rho(u)}{du}\vec{e}_\rho(\varphi(u)) + \rho(u)\frac{d\varphi(u)}{du}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\rho(\varphi(u)) + \frac{dz(u)}{du}\vec{e}_z.\end{aligned}$$

Man kann leicht nachprüfen, dass

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\rho(\varphi) = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

gilt. Insgesamt erhält man für den Tangentenvektor in Zylinderkoordinaten also

$$\vec{t}(u) = \frac{d\rho(u)}{du}\vec{e}_\rho + \rho(u)\frac{d\varphi(u)}{du}\vec{e}_\varphi + \frac{dz(u)}{du}\vec{e}_z, \quad (3.5)$$

wobei die Ortsabhängigkeit der Basisvektoren aus Gründen der Übersichtlichkeit unterdrückt wurde.

Mit analogen Überlegungen findet man in Kugelkoordinaten $(r(u), \vartheta(u), \varphi(u))$

$$\begin{aligned}\vec{r}(u) &= r(u)\vec{e}_r(\vartheta(u), \varphi(u)), \\ \vec{t}(u) &= \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} \\ &= \frac{dr(u)}{du}\vec{e}_r + r(u)\frac{d\vartheta(u)}{du}\vec{e}_\vartheta + r(u)\sin\vartheta(u)\frac{d\varphi(u)}{du}\vec{e}_\varphi.\end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1.1 Kurvenintegral

Wir befassen uns im folgenden mit stetig differenzierbaren doppelunktfreien Kurven. Wir wollen versuchen, solchen Kurven eine *Bogenlänge* zuzuordnen. Dazu führen wir ein kartesisches Koordinatensystem ein und wählen eine spezielle Parameterdarstellung mit x als Parameter, siehe Abb. 3.1. Bedingung (3.3) garantiert, dass sich mindestens lokal immer die in Abb. 3.1 gezeigte Situation herstellen lässt, wie man zeigen kann. Die Parameterdarstellung lautet dann

$$\vec{r}(x) = x\vec{e}_x + f(x)\vec{e}_y + g(x)\vec{e}_z, \quad a \leq x \leq b,$$

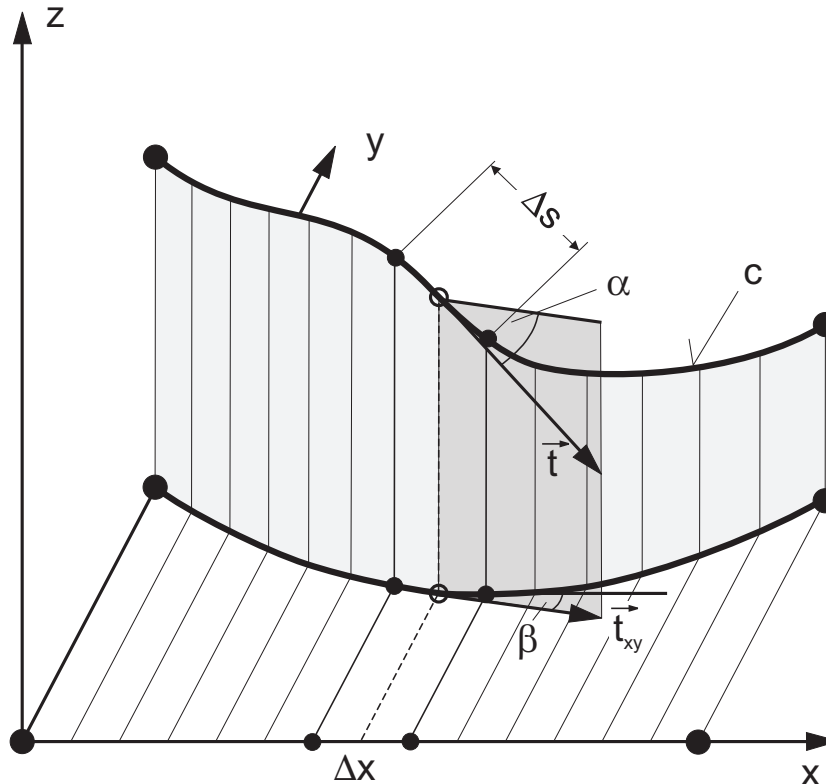


Bild 3.1: Integration entlang einer Kurve.

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Der zugehörige Tangentenvektor lautet

$$\vec{t}(x) = \frac{\partial \vec{r}(x)}{\partial x} = \vec{e}_x + f_x(x)\vec{e}_y + g_x(x)\vec{e}_z,$$

wobei mit $f_x(x)$ und $g_x(x)$ die Ableitungen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nach x gemeint sind.

Wir führen eine Zerlegung Z von C in n Teilabschnitte mit Hilfe der Teilpunkte

$$\vec{r}_i = \vec{r}(x_i), \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

ein. Dabei ist

$$\delta(Z) = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$$

der Feinheitsgrad der Zerlegung. Wir wählen in jedem Teilabschnitt einen Punkt $\vec{r}(\xi_i)$, $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Es sei T_{ξ_i} die Tangente an C im Punkt $\vec{r}(\xi_i)$. Wir betrachten jenes Stück der Tangente, welches zwischen den Ebenen $x = x_{i-1}$ und $x = x_i$

liegt und die Länge Δs_i besitzt. Die Summe

$$s \approx \sum_{i=1}^n \Delta s_i$$

kann als Näherung für die Bogenlänge s von C angesehen werden. Dabei wird die Näherung umso besser sein, je feiner die Zerlegung Z gewählt wurde. Deshalb betrachten wir eine Folge $\{Z_1, Z_2, Z_3, \dots\}$ von Zerlegungen, deren Feinheitegrad $\delta(Z_j)$ gegen Null konvergiert, und definieren

$$s \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_j) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \int_C ds. \quad (3.7)$$

Die Schreibweise mit dem Integralzeichen soll zum Ausdruck bringen, dass die Bogenlänge als Grenzwert einer Summe definiert ist.

Als nächstes muss untersucht werden, ob der Grenzwert tatsächlich existiert. Aus Abb. 3.1 entnimmt man den Zusammenhang

$$\Delta s_i \cos \alpha \cos \beta = \Delta x_i.$$

Dabei ist $\vec{t}_{xy} = \vec{e}_x + f_x(x) \vec{e}_y$ und

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\vec{t} \cdot \vec{t}_{xy}}{|\vec{t}| |\vec{t}_{xy}|} \frac{\vec{t}_{xy} \cdot \vec{e}_x}{|\vec{t}_{xy}|} = \dots = \frac{1}{|\vec{t}|}.$$

Damit bekommt man aus (3.7)

$$s = \lim_{\delta(Z_j) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \lim_{\delta(Z_j) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\vec{t}(\xi_i)| \Delta x_i. \quad (3.8)$$

Aufgrund der getroffenen Voraussetzungen über die stetige Differenzierbarkeit von C ist

$$|\vec{t}(x)| = \sqrt{1 + f_x(x)^2 + g_x(x)^2}$$

eine auf $a \leq x \leq b$ stetige Funktion. Aus der Theorie der Riemann'schen Integrale ist bekannt, dass in diesem Fall der Grenzwert (3.8) unabhängig von der Wahl der ξ_i existiert und mit dem entsprechenden Integral übereinstimmt. Also gilt

$$s = \int_C ds = \int_a^b |\vec{t}(x)| dx. \quad (3.9)$$

Dadurch konnte das Problem der Bogenlängenberechnung auf ein gewöhnliches Integral zurückgeführt werden. Das Symbol ds nennt man *skalares Linienelement*. Obwohl wir bei der Herleitung von einer speziellen Parameterdarstellung

ausgegangen sind, kann man zeigen, dass der Wert des Integrals (3.9) ganz unabhängig von der Wahl einer zulässigen Parameterdarstellung ist. Für das skalare Linienelement gilt deshalb

$$ds = |\vec{t}(u)| du = \left| \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} \right| du. \quad (3.10)$$

Auf analoge Weise kann man das Kurvenintegral über ein auf der Kurve definiertes, stetiges Skalarenfeld $\lambda(\vec{r})$ erklären. Es gilt

$$\int_C \lambda(\vec{r}) ds \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_j) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta s_i = \int_a^b \lambda(\vec{r}(u)) |\vec{t}(u)| du. \quad (3.11)$$

Das Kurvenintegral über ein Skalarenfeld ist unabhängig von der Orientierung der Kurve,

$$\int_C \lambda(\vec{r}) ds = \int_{-C} \lambda(\vec{r}) ds.$$

Wenn man zum Beispiel $\lambda(\vec{r})$ als eindimensionalen Ladungsbelag auf der Kurve auffasst, gilt für die gesamte auf der Kurve verteilte Ladung

$$Q(C) = \int_C \lambda ds.$$

Es ist klar, dass die Ladung $Q(C)$ nicht vom Durchlaufsinne der Kurve abhängen darf.

Eine besonders wichtige Rolle in der elektromagnetischen Feldtheorie spielt das *Arbeitsintegral*, ausgehend von einem auf der Kurve definierten stetigen Vektorfeld \vec{a} . Es gilt

$$\int_C \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_j) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \cdot \vec{t}_{0,i} \Delta s_i = \int_a^b \vec{a}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{t}(u) du. \quad (3.12)$$

Der Begriff des Arbeitsintegrals stammt aus der Mechanik. Sofern man \vec{a} als Kraftfeld ansieht, ist $\vec{a}_i \cdot \vec{t}_{0,i} \Delta s_i$ die Arbeit, die von der konstanten Kraft \vec{a}_i an einem Probekörper verrichtet wird, der sich um Δs_i entlang der Tangente bewegt. Das Arbeitsintegral liefert deshalb die Arbeit, die das Kraftfeld an einem Probekörper verrichtet, wenn er längs der Kurve C bewegt wird. Ist das Ergebnis negativ, so muss Energie von außen aufgewendet werden, um den Körper längs der Kurve bewegen zu können.

In (3.12) ist $d\vec{r}$ das *vektorielle Linienelement*. Für das vektorielle Linienelement gilt

$$d\vec{r} = \vec{t}(u) du = \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} du, \quad (3.13)$$

und es hängt mit dem skalaren Linienelement gemäß

$$d\vec{r} = \frac{\vec{t}(u)}{|\vec{t}(u)|} |\vec{t}(u)| du = \vec{t}_0(u) ds$$

zusammen. Man kann das vektorielle Linienelement deshalb als einen Vektor auffassen, dessen Richtung mit der Richtung des Tangentenvektors übereinstimmt, und dessen Betrag gleich dem skalaren Linienelement ist.

Das Arbeitsintegral wechselt sein Vorzeichen, wenn die Orientierung der Kurve umgekehrt wird,

$$\int_C \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{-C} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Arbeitsintegrale über geschlossene Kurven haben in der Vektoranalysis eine besondere Bedeutung. Um solche Integrale auffällig zu kennzeichnen, schreibt man

$$\oint_C \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{statt} \quad \int_C \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

falls es sich bei C um eine geschlossene Kurve handelt, $\partial C = \emptyset$.

Das schrittweise Vorgehen bei der Berechnung von Kurvenintegralen ist am Beispiel des Kreisumfangs in Tabelle 3.1 noch einmal zusammengestellt.

Die Definitionen der Kurvenintegrale lassen sich unmittelbar auf stückweise stetig differenzierbare Kurven übertragen. Setzt sich C aus endlich vielen stetig differenzierbaren Kurven C_1, \dots, C_k zusammen, so setzt man

$$\int_C \dots \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{C_1} \dots + \dots + \int_{C_k} \dots$$

Ähnlich kann man vorgehen, wenn die Integranden stückweise stetig sind.

3.1.2 Beispiele

Beispiel 1: Berechnung der elektrischen Spannung aus dem elektrischen Feld

Gegeben ist das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{E_0}{R} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y)$$

in kartesischen Koordinaten (x, y, z) . Es soll die elektrische Spannung entlang einer Kurve vom Punkt $(R, 0, 0)$ zum Punkt $(0, R, 0)$ berechnet werden, wenn man sich a) entlang eines Viertelkreises mit Radius R , b) geradlinig bewegt.

Tabelle 3.1: Schrittweises Vorgehen bei der Berechnung von Kurvenintegralen am Beispiel des Kreisumfangs

1.	Formulierung	$s = \int_C ds$
2.	Kurve C spezifizieren	$\vec{r}(u) = R(\cos u \vec{e}_x + \sin u \vec{e}_y)$
3.	Grenzen angeben	$a = 0, b = 2\pi$
4.	$\vec{t}(u) = \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u}$ bilden, damit $d\vec{r} = \vec{t}(u) du$. Ggfs. auch $ \vec{t}(u) $ und $ds = \vec{t}(u) du$ bilden.	$\vec{t}(u) = R(-\sin u \vec{e}_x + \cos u \vec{e}_y),$ $ \vec{t}(u) = R,$ $ds = R du$
5.	Gewöhnliches Integral im Parameterbereich aufschreiben.	$s = \int_0^{2\pi} R du$
6.	$\vec{r}(u)$ in Integrand einsetzen, ggfs. Skalarprodukt auswerten.	entfällt
7.	Gewöhnliches Integral berechnen.	$s = 2\pi R$

Zu a): Verwenden wir für den orientierten Viertelkreis C_1 die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(u) = R(\cos u \vec{e}_x + \sin u \vec{e}_y), \quad 0 \leq u \leq \pi/2,$$

so ergibt sich

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} du = R(-\sin u \vec{e}_x + \cos u \vec{e}_y) du$$

sowie

$$\vec{E}(\vec{r}(u)) = E_0(-\sin u \vec{e}_x + \cos u \vec{e}_y)$$

und damit

$$\begin{aligned} U(C_1) &= \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= E_0 R \int_0^{\pi/2} (\sin^2 u + \cos^2 u) du \\ &= E_0 R \int_0^{\pi/2} du = E_0 R \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Zu b): Verwenden wir für die orientierte Strecke C_2 die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(u) = R((1-u)\vec{e}_x + u\vec{e}_y), \quad 0 \leq u \leq 1,$$

so ergibt sich

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} du = R(-\vec{e}_x + \vec{e}_y) du$$

sowie

$$\vec{E}(\vec{r}(u)) = E_0(-u\vec{e}_x + (1-u)\vec{e}_y)$$

und damit

$$\begin{aligned} U(C_2) &= \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= E_0 R \int_0^1 ((-u)(-1) + (1-u)) du \\ &= E_0 R \int_0^1 du = E_0 R. \end{aligned}$$

Offenbar ist $U(C_1) \neq U(C_2)$! Die elektrische Spannung hängt im allgemeinen also nicht nur vom Anfangs- und vom Endpunkt, sondern auch von der Wahl der Verbindungskurve ab.

Beispiel 2: Berechnung der Bogenlänge einer Schraubenlinie

Es soll die Bogenlänge einer Windung der Schraubenlinie mit Radius R und Ganghöhe $2\pi h$ berechnet werden.

Eine zulässige Parameterdarstellung für eine Windung der Schraubenlinie lautet in kartesischen Koordinaten

$$x(u) = R \cos u, \quad y(u) = R \sin u, \quad z(u) = hu, \quad 0 \leq u \leq 2\pi.$$

Mit (3.4) ergibt sich daraus für den Tangentenvektor

$$\vec{t}(u) = -R \sin u \vec{e}_x + R \cos u \vec{e}_y + h \vec{e}_z.$$

Für das skalare Linienelement ist dann

$$ds = |\vec{t}(u)| du = \sqrt{R^2 + h^2} du$$

und für die Bogenlänge

$$s = \int_C ds = \sqrt{R^2 + h^2} \int_0^{2\pi} du = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Man hätte auch von einer Parameterdarstellung in Zylinderkoordinaten ausgehen können, nämlich

$$\rho(u) = R, \quad \varphi(u) = u, \quad z(u) = hu, \quad 0 \leq u \leq 2\pi.$$

Aus Gleichung (3.5) erhält man für den Tangentenvektor

$$\vec{t}(u) = R \vec{e}_\varphi + h \vec{e}_z.$$

Hieraus ergibt sich dasselbe skalare Linienelement und dieselbe Bogenlänge, wie es sein muss.

3.2 Flächen in E_3

Ähnlich zur Vorgehensweise im Abschnitt 3.1 wollen wir Flächen im allgemeinen durch Parameterdarstellungen charakterisieren. Eine Raumkurve kann man sich durch stetige Verformung einer geraden Linie erzeugt denken, eine Fläche im Raum durch stetige Verformung einer ebenen Fläche.

Wir betrachten dazu einen zweidimensionalen Bereich B , den *Parameterbereich*. Er tritt an die Stelle des Parameterintervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aus Abschnitt 3.1. Wir stellen folgende Anforderungen an B :

- B ist eine Teilmenge des zweidimensionalen Raumes \mathbb{R}^2 . Das Innere $B \setminus \partial B$ ist nicht leer.
- B ist abgeschlossen und beschränkt. Abgeschlossen bedeutet, dass der Rand ∂B in B enthalten ist. Diese Forderung ist die zweidimensionale Entsprechung für ein abgeschlossenes endliches Intervall.
- Der Bereich soll sich durch endlich viele Schnitte parallel zu den Koordinatenachsen in *Normalbereiche* erster und zweiter Art einteilen lassen, Abb. 3.2. Die Einteilung in Normalbereiche ist nicht eindeutig.

$B \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich erster Art, wenn

$$B = \{(u, v) \mid a \leq u \leq b, \quad c(u) \leq v \leq d(u)\}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $c(u) \leq d(u)$ gilt. Entsprechend heißt $B \subset \mathbb{R}^2$ Normalbereich zweiter Art, wenn

$$B = \{(u, v) \mid a(v) \leq u \leq b(v), \quad c \leq v \leq d\}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $a(v) \leq b(v)$ gilt.

Ein Bereich, der diese Eigenschaften besitzt, heißt *regulär*. Damit können wir nun Flächen mit folgender Parameterdarstellung beschreiben:

$$A : B \rightarrow E_3 : (u, v) \mapsto \vec{r} = \vec{r}(u, v). \quad (3.14)$$

Hält man einen der beiden Parameter fest, entstehen Kurven auf A , die sogenannten *Parameterlinien*. Es gibt die beiden Kurvenscharen

$$\begin{aligned} C_v : u \mapsto \vec{r} &= \vec{r}(u, v), & u\text{-Linien,} \\ C_u : v \mapsto \vec{r} &= \vec{r}(u, v), & v\text{-Linien.} \end{aligned}$$

Eine Fläche A heißt *stetig differenzierbar*, wenn es eine Parameterdarstellung (3.14) gibt, die folgende Forderungen erfüllt:

1. Die Parameterlinien C_v, C_u sind stetig differenzierbar.
2. Die Tangentenvektoren

$$\vec{t}_u(u, v) = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \quad \text{und} \quad \vec{t}_v(u, v) = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \quad (3.15)$$

sind in jedem Punkt linear unabhängig,

$$\vec{n}(u, v) = \vec{t}_u(u, v) \times \vec{t}_v(u, v) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad (u, v) \in B. \quad (3.16)$$

Der Vektor $\vec{n}(u, v)$ heißt *Normalenvektor* an A im Punkt $\vec{r}(u, v)$.

3. Die Parameterdarstellung (3.14) braucht nicht umkehrbar eindeutig zu sein. Falls es Parameterwerte $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ mit $\vec{r}(u_1, v_1) = \vec{r}(u_2, v_2)$ gibt, so wird zusätzlich noch $\vec{n}(u_1, v_1) = \vec{n}(u_2, v_2)$ gefordert.

Jede solche Parameterdarstellung wird als *zulässig* bezeichnet. A heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn A sich aus endlich vielen aneinander anschließenden stetig differenzierbaren Flächen zusammensetzt.

Aus (3.16) folgt, dass eine stetig differenzierbare Fläche in jedem Punkt $\vec{r}(u, v)$ eine bis auf das Vorzeichen eindeutige Normalenrichtung

$$\vec{n}_0(u, v) = \pm \frac{\vec{n}(u, v)}{|\vec{n}(u, v)|}$$

besitzt, die durch den *Normaleneinheitsvektor* $\vec{n}_0(u)$ gegeben ist. Um das Vorzeichen eindeutig festzulegen, ist es sinnvoll, der Fläche A eine Orientierung zu

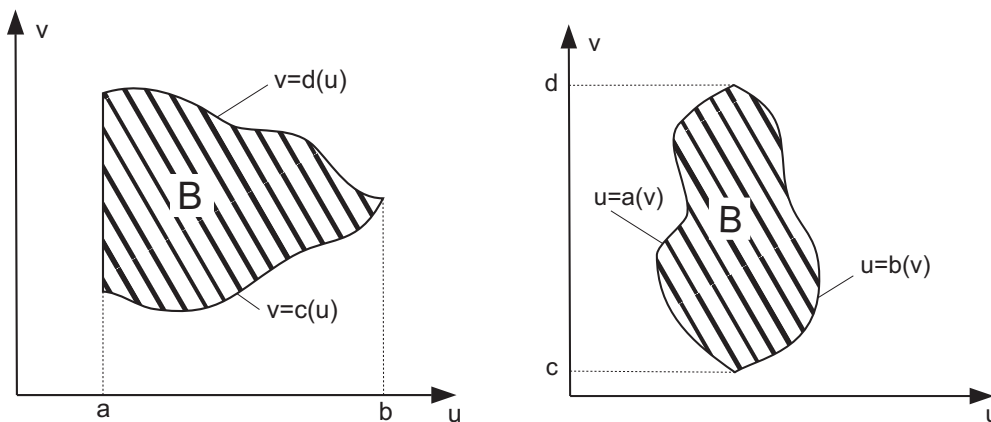


Bild 3.2: Links: Normalbereich erster Art. $c(u) \leq d(u)$ sind stetig differenzierbare Funktionen. Rechts: Normalbereich zweiter Art. $a(v) \leq b(v)$ sind stetig differenzierbare Funktionen.

erteilen, indem man auf A einen Umlaufsinn auszeichnet. Die Orientierung von A soll sich mit der Normalenrichtung zu einer Rechtsschraube ergänzen, der Orientierung von E_3 . Man kann zeigen, dass die Normalenrichtung unabhängig von der Wahl der zulässigen Parameterdarstellung ist. Die Normalenrichtung ist daher eine geometrische Eigenschaft der Fläche.

Es sei noch bemerkt, dass sich nicht allen Flächen, die sich aus mehreren Flächenstücken des hier betrachteten Typs aufbauen lassen, eine Orientierung erteilen lässt. Ein Beispiel für eine nicht orientierbare Fläche bildet das *Möbius'sche Band*, das sich am einfachsten durch einen einmal umgeschlagenen Gürtel veranschaulichen lässt. Nicht orientierbare stetig differenzierbare Flächen sind dadurch charakterisiert, dass es auf ihnen geschlossene Kurven gibt, so dass der Normaleinheitsvektor \vec{n}_0 in einem Kurvenpunkt bei einem Umlauf stetig in den entgegengesetzten Einheitsvektor $-\vec{n}_0$ übergeht. In diesem Fall ist es nicht möglich, die Seiten der Fläche zu unterscheiden.

Die Gleichung

$$T_{(u,v)} : \quad \vec{r}(\mu, \nu) = \vec{r}(u, v) + \mu \vec{t}_u(u, v) + \nu \vec{t}_v(u, v), \quad (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$$

ist eine Parameterdarstellung der *Tangentialebene* $T_{(u,v)}$ an A im Punkt $\vec{r}(u, v)$. Die Menge der Punkte in der Tangentialebene bildet einen *affinen Teilraum* des E_3 .

Die Tangentialebene $T_{(u,v)}$ wird von den Tangentenvektoren an die Parameterlinien im Punkt $\vec{r}(u, v)$ aufgespannt. Die Tangentenvektoren an beliebige stetig differenzierbare Kurven, die in der Fläche liegen und durch den Punkt $\vec{r}(u, v)$ gehen, liegen in der Tangentialebene. Man kann nämlich zeigen, dass solche Kurven lokal eine Parameterdarstellung der Form

$$\tilde{\vec{r}}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$$

besitzen, mit stetig differenzierbaren Funktionen $u(t)$ und $v(t)$. Aus der Kettenregel folgt dann

$$\vec{t}(t) = \vec{t}_u(u, v) \frac{du}{dt} + \vec{t}_v(u, v) \frac{dv}{dt},$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Beispiele für Flächen, die in der elektromagnetischen Feldtheorie häufig auftreten, sind Koordinatenflächen von Zylinder- und Kugelkoordinaten. Wie schon im Abschnitt 2.4.3 erläutert bricht das Kugelkoordinatensystem an den Polen der Kugel zusammen. Dort ist die Zulässigkeit der Parameterdarstellung gestört. Es lässt sich übrigens mit tieferehenden mathematischen Hilfsmitteln beweisen, dass es keine zulässige stetig differenzierbare Parameterdarstellung für die ganze Kugel gibt.

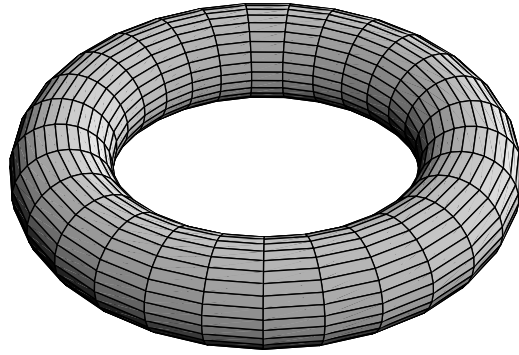


Bild 3.3: Oberfläche eines Torus

Ein anderes Beispiel für eine stetig differenzierbare Fläche ist die Oberfläche eines Torus, die in kartesischen Koordinaten (x, y, z) die Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} x &= (R + r \cos u) \cos v, \\ y &= (R + r \cos u) \sin v, \\ z &= r \sin u, \end{aligned} \right\} 0 \leq u, v < 2\pi \quad (3.17)$$

besitzt, Abb. 3.3. Diese Parameterdarstellung ist zulässig.

3.2.1 Integrale im Parameterbereich

Die wesentliche Idee bei der Definition von Integralen über Flächen im Raum besteht darin, diese Integrale auf zweidimensionale Integrale im Parameterbereich zurückzuführen. Diese Integrale sind aus der Grundvorlesung Mathematik bekannt und sollen hier noch einmal kurz wiederholt werden.

Gehen wir von einer stetigen Funktion $f(x, y)$ aus, die auf einem regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist. Um das Integral

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$$

zu erklären, geht man zweckmäßigerweise folgendermaßen vor:

- Die Funktion $f(x, y)$ wird außerhalb des Bereiches B durch die Nullfunktion fortgesetzt,

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{für } (x, y) \in B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Der Bereich B wird in ein Rechteck R eingebettet, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen liegen,

$$B \subset \tilde{B} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

- Wir zerlegen $[a, b]$ und $[c, d]$ in m beziehungsweise n Teilintervalle,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d.$$

- Hierdurch ergeben sich $m \cdot n$ Rechtecke

$$R_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

- Wir wählen nun in jedem Rechteck R_{ij} einen Punkt (ξ_{ij}, η_{ij}) . Es gilt also

$$x_{i-1} \leq \xi_{ij} \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq \eta_{ij} \leq y_j.$$

Die Menge, die aus den Rechtecken R_{ij} und den Punkten (ξ_{ij}, η_{ij}) besteht, bezeichnen wir als eine *Zerlegung* Z des Rechtecks R , mit

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Jeder Zerlegung Z von R ordnen wir die *Riemann-Summe*

$$S(f; Z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

und den Feinheitsgrad

$$\delta(Z) = \max_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$$

zu. Die Riemann-Summe kann als Näherung für den Rauminhalt des Zylinderabschnittes mit der Grundfläche R angesehen werden, der zwischen der Ebene $z = 0$ und der Fläche $z = f(x, y)$ liegt. $\delta(Z)$ ist die maximale Diagonallänge der Rechtecke R_{ij} .

- Betrachtet man eine Folge von Zerlegungen $\{Z_1, Z_2, Z_3, \dots\}$, deren Feinheitsgrad gegen Null konvergiert, dann konvergiert die Zerlegungssumme unter den hier getroffenen Voraussetzungen (regulärer Bereich B , stetige Funktion $f(x, y)$ auf B), gegen einen festen Wert. Dieser Wert wird als *Gebietsintegral* von f über B bezeichnet. Man verwendet die Schreibweise

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_k) \rightarrow 0} S(f; Z). \quad (3.18)$$

Das Gebietsintegral besitzt folgende Eigenschaften:

$$\iint_B (\alpha f + \beta g) \, dx \, dy = \alpha \iint_B f \, dx \, dy + \beta \iint_B g \, dx \, dy, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (3.19)$$

das ist die *Linearität*. Unter *Monotonie* versteht man

$$f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in B \quad \Rightarrow \quad \iint_B f \, dx \, dy \leq \iint_B g \, dx \, dy. \quad (3.20)$$

Zerlegt man den Integrationsbereich B in Teilbereiche B_1, B_2 , dann gilt die *Additivität*

$$\iint_B f \, dx \, dy = \iint_{B_1} f \, dx \, dy + \iint_{B_2} f \, dx \, dy. \quad (3.21)$$

Schließlich gilt der *Mittelwertsatz*,

$$\exists (\xi, \eta) \in B : \quad \iint_B f \, dx \, dy = f(\xi, \eta) \iint_B dx \, dy. \quad (3.22)$$

Es gibt also in Abb. 3.4 stets einen volumengleichen Zylinderabschnitt, der durch die Ebenen $z = 0$ und $z = f(\xi, \eta)$ begrenzt wird.

Zur Berechnung von Mehrfachintegralen geht man normalerweise nicht von der Definition (3.18) aus, sondern führt sie auf geschachtelte gewöhnliche Integrale zurück. Dazu zerlegt man den Bereich B in Normalbereiche erster und zweiter Art, was aufgrund der Voraussetzungen über reguläre Bereiche immer möglich ist. Abb. 3.2 zeigt solche Normalbereiche. Unter Ausnutzung der Additivität (3.21) ergibt sich das Integral als Summe der Integrale über die Normalbereiche. Für einen Normalbereich erster Art gilt

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \, dy \right) dx, \quad (3.23)$$

für einen Normalbereich zweiter Art

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) \, dx \right) dy. \quad (3.24)$$

Dieser Sachverhalt wird auch als *Satz von Fubini* bezeichnet. Daraus folgt auch, dass man bei festen Grenzen die Integrationsreihenfolge vertauschen darf,

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

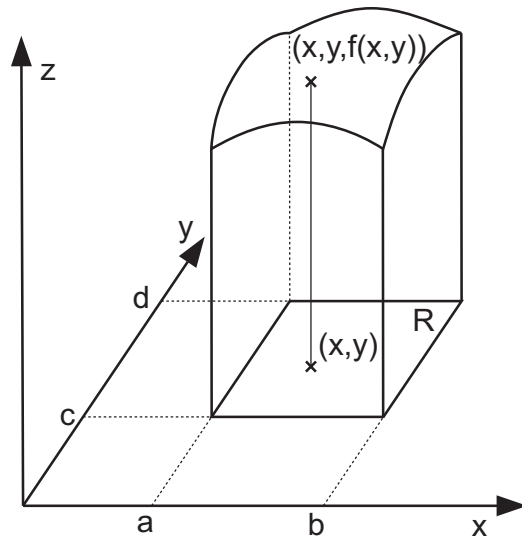


Bild 3.4: Integration einer Funktion $f(x, y)$ über einen Rechteckbereich R .

3.2.2 Flächenintegral

Wir befassen uns im folgenden mit stetig differenzierbaren Flächen. Wir wollen versuchen, solchen Flächen einen *Flächeninhalt* zuzuordnen. Dazu führen wir ein kartesisches Koordinatensystem ein und wählen eine spezielle Parameterdarstellung mit (x, y) als Parameter, siehe Abb. 3.5. Bedingung (3.16) garantiert, dass sich mindestens lokal immer die in Abb. 3.5 gezeigte Situation herstellen lässt, wie man zeigen kann. Die Parameterdarstellung lautet dann

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + f(x, y)\vec{e}_z, \quad (x, y) \in B,$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f(x, y)$ und einem regulären Bereich B . Der zugehörige Normalevektor lautet

$$\pm \vec{n}(x) = \frac{\partial \vec{r}(x, y)}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}(x, y)}{\partial y} = -f_x(x, y)\vec{e}_x - f_y(x, y)\vec{e}_y + \vec{e}_z,$$

wobei mit $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ nach x beziehungsweise y gemeint sind.

Wir führen die im Abschnitt 3.2.1 erläuterte Zerlegung Z des Bereiches B ein. Es sei $T_{(\xi_{ij}, \eta_{ij})}$ die Tangentialebene an A im Punkt $\vec{r}(\xi_{ij}, \eta_{ij})$. Wir betrachten jenes Stück der Tangentialebene, welches von den Ebenen $x = x_{i-1}$ und $x = x_i$, beziehungsweise $y = y_{j-1}$ und $y = y_j$ begrenzt wird und den Flächeninhalt ΔA_{ij} besitzt. Die Summe

$$A \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta A_{ij}$$

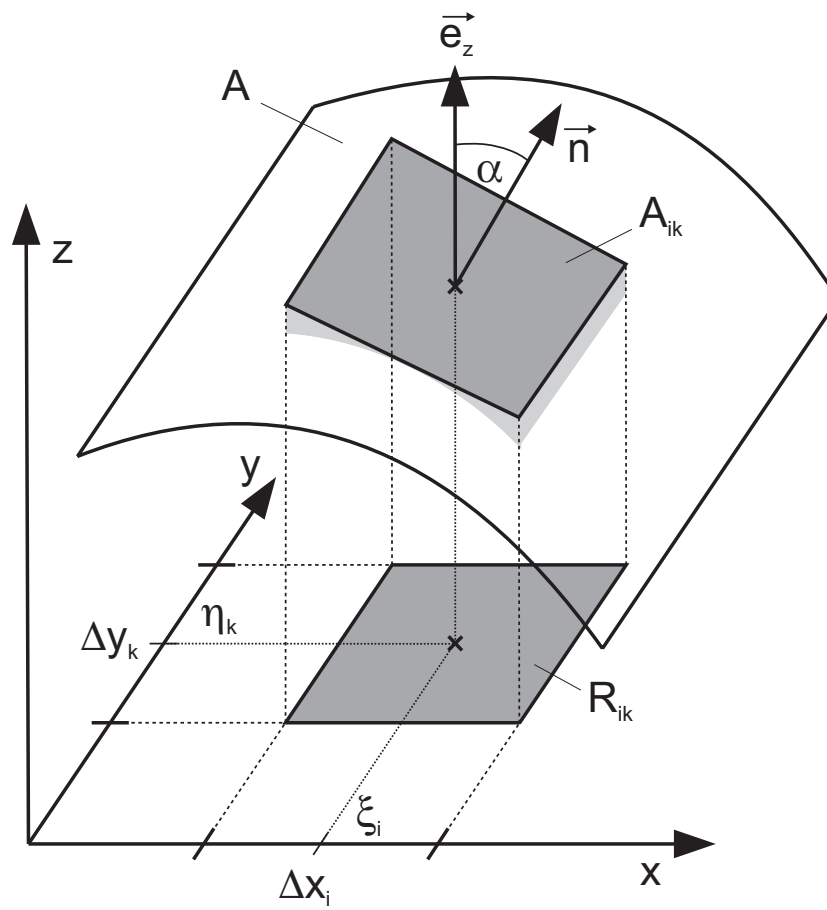


Bild 3.5: Integration über eine Fläche.

kann als Näherung für den Flächeninhalt A angesehen werden. Dabei wird die Näherung umso besser sein, je feiner die Zerlegung Z gewählt wurde. Deshalb betrachten wir eine Folge $\{Z_1, Z_2, Z_3, \dots\}$ von Zerlegungen, deren Feinheitsgrad $\delta(Z_k)$ gegen Null konvergiert, und definieren

$$A \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_k) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta A_{ij} = \iint_A dA. \quad (3.25)$$

Die Schreibweise mit dem Integralzeichen soll zum Ausdruck bringen, dass der Flächeninhalt als Grenzwert einer Summe definiert ist.

Als nächstes muss untersucht werden, ob der Grenzwert tatsächlich existiert. Aus Abb. 3.5 entnimmt man den Zusammenhang

$$\Delta A_{ij} |\cos \alpha| = \Delta R_{ij}.$$

Dabei ist

$$|\cos \alpha| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{e}_z|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{|\vec{n}|}.$$

Damit bekommt man aus (3.25)

$$A \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_k) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta A_{ij} = \lim_{\delta(Z_k) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\vec{n}(\xi_{ij}, \eta_{ij})| \Delta x_i \Delta y_j. \quad (3.26)$$

Die rechte Seite von Gleichung (3.26) ist die Riemann-Summe $S(|\vec{n}|, Z)$, so dass wir (3.26) auch in der Form

$$A = \lim_{\delta(Z_k) \rightarrow 0} S(|\vec{n}|, Z) \quad (3.27)$$

schreiben können. Aufgrund der getroffenen Voraussetzungen über die stetige Differenzierbarkeit von A ist

$$|\vec{n}(x, y)| = \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} \quad (3.28)$$

eine in R stetige Funktion. Aus der im Abschnitt 3.2.1 erläuterten Theorie der Gebietsintegrale ist bekannt, dass in diesem Fall der Grenzwert (3.27) unabhängig von der Wahl der (ξ_{ij}, η_{ij}) existiert und mit dem entsprechenden Integral übereinstimmt. Also gilt

$$A = \iint_A dA = \iint_B |\vec{n}(x, y)| dx dy. \quad (3.29)$$

Dadurch konnte das Problem der Flächeninhaltsberechnung auf ein Gebietsintegral im Parameterbereich zurückgeführt werden. Das Symbol dA nennt man

skalares Flächenelement. Obwohl wir bei der Herleitung von einer speziellen Parameterdarstellung ausgegangen sind, kann man zeigen, dass der Wert des Integrals (3.29) ganz unabhängig von der Wahl einer zulässigen Parameterdarstellung ist. Für das skalare Flächenelement gilt deshalb

$$dA = \left| \vec{t}_u(u, v) \times \vec{t}_v(u, v) \right| du dv = \left| \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \right| du dv. \quad (3.30)$$

Auf analoge Weise kann man das Flächenintegral über ein auf der Fläche definiertes, stetiges Skalarfeld $\lambda(\vec{r})$ erklären. Es gilt

$$\begin{aligned} \iint_A \lambda(\vec{r}) dA &\stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_k) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \Delta A_{ij} \\ &= \iint_B \lambda(\vec{r}(u, v)) |\vec{n}(u, v)| du dv. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Das Flächenintegral über ein Skalarfeld ist unabhängig von der Orientierung der Fläche,

$$\iint_A \lambda(\vec{r}) dA = \iint_{-A} \lambda(\vec{r}) dA.$$

Wenn man zum Beispiel $\lambda(\vec{r})$ als zweidimensionale Ladungsbelegung auf der Fläche auffasst, gilt für die gesamte auf der Fläche verteilte Ladung

$$Q(A) = \iint_A \lambda dA.$$

Es ist klar, dass die Ladung $Q(A)$ nicht vom Umlaufsinn der Fläche abhängen darf.

Eine besonders wichtige Rolle in der elektromagnetischen Feldtheorie spielt das *Flussintegral*, ausgehend von einem auf der Fläche definierten stetigen Vektorfeld \vec{a} . Es gilt

$$\begin{aligned} \iint_A \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} &\stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_k) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \vec{a}_{ij} \cdot \vec{n}_{0,ij} \Delta A_{ij} \\ &= \iint_B \vec{a}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Der Begriff des Flussintegrals stammt aus der Hydrodynamik. Sofern man \vec{a} als Strömungsfeld einer Flüssigkeit oder eines Gases ansieht, ist $\vec{a}_{ij} \cdot \vec{n}_{0,ij} \Delta A_{ij}$ die Stoffmenge, die mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{a}_{ij} je Zeiteinheit durch das

Flächenstück ΔA_{ij} transportiert wird. Das Flussintegral liefert deshalb die gesamte Stoffmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche A fließt.

In (3.32) ist $d\vec{A}$ das *vektorielle Flächenelement*. Für das vektorielle Flächenelement gilt

$$\pm d\vec{A} = \vec{t}_u(u, v) \times \vec{t}_v(u, v) du dv = \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial v} du dv, \quad (3.33)$$

und es hängt mit dem skalaren Flächenelement gemäß

$$\begin{aligned} \pm d\vec{A} &= \frac{\vec{t}_u(u, v) \times \vec{t}_v(u, v)}{|\vec{t}_u(u, v) \times \vec{t}_v(u, v)|} |\vec{t}_u(u, v) \times \vec{t}_v(u, v)| du dv \\ &= \vec{n}_0(u, v) dA \end{aligned}$$

zusammen. Man kann das vektorielle Flächenelement deshalb als einen Vektor auffassen, dessen Richtung mit der Richtung des Normalenvektors übereinstimmt, und dessen Betrag gleich dem skalaren Flächenelement ist.

Das Flussintegral wechselt sein Vorzeichen, wenn die Orientierung der Fläche umgekehrt wird,

$$\iint_A \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = - \iint_{-A} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}.$$

Die Orientierung der Fläche legt die Richtung des Normalenvektors und damit den Bezugssinn des Flusses fest.

Flussintegrale über geschlossene Flächen haben in der Vektoranalysis eine besondere Bedeutung. Um solche Integrale auffällig zu kennzeichnen, schreibt man

$$\oiint_A \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \quad \text{statt} \quad \iint_A \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{A},$$

falls es sich bei A um eine geschlossene Fläche handelt, $\partial A = \emptyset$. Geschlossene Flächen werden üblicherweise so orientiert, dass die Normalenvektoren nach außen zeigen.

Die Definitionen der Flächenintegrale lassen sich unmittelbar auf stückweise stetig differenzierbare Flächen übertragen. Setzt sich A aus endlich vielen stetig differenzierbaren Flächen A_1, \dots, A_k zusammen, so setzt man

$$\int_A \dots \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{A_1} \dots + \dots + \int_{A_k} \dots$$

3.2.3 Beispiele

Beispiel 1: Flächeninhalt einer Rotationsfläche

Betrachtet wird eine stetig differenzierbare Kurve in der xz -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems. Gegeben ist eine zulässige Parameterdarstellung durch die Funktionen $x(u)$ und $z(u)$ mit $x(u) > 0$, $a \leq u \leq b$. Durch Rotation dieser Kurve um die z -Achse entsteht eine *Rotationsfläche*. Man gebe eine zulässige Parameterdarstellung der Rotationsfläche an und berechne ihren Flächeninhalt.

Eine zulässige Parameterdarstellung der Rotationsfläche lautet

$$\left. \begin{aligned} x(u, v) &= x(u) \cos v, \\ y(u, v) &= x(u) \sin v, \\ z(u, v) &= z(u), \end{aligned} \right\} a \leq u \leq b, \quad 0 \leq v < 2\pi.$$

Daraus bekommt man für den Normalenvektor in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \pm \vec{n}(u, v) &= \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} x_u(u) \cos v \\ x_u(u) \sin v \\ z_u(u) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x(u) \sin v \\ x(u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= x(u) \begin{pmatrix} -z_u(u) \cos v \\ -z_u(u) \sin v \\ x_u(u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und für seinen Betrag

$$|\vec{n}(u, v)| = x(u) \sqrt{x_u^2(u) + z_u^2(u)} > 0.$$

Für den Flächeninhalt gilt dann

$$\begin{aligned} A &= \iint_A dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b x(u) \sqrt{x_u^2(u) + z_u^2(u)} du \right) dv \\ &= 2\pi \int_a^b x(u) \sqrt{x_u^2(u) + z_u^2(u)} du. \end{aligned}$$

Beispiel 2: Flächeninhalt der Kugeloberfläche

Eine Kugeloberfläche kann durch Rotation eines Kreisbogens vom Radius R mit der zulässigen Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= R \cos u, \\ z(u) &= R \sin u, \end{aligned} \right\} -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

erzeugt werden. Aus dem Resultat für die Rotationsfläche folgt

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R \cos u \sqrt{R^2 \sin^2 u + R^2 \cos^2 u} \, du \\ &= 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du = 2\pi R^2 \sin u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $u = \pm\pi/2$ ist $x(u) = 0$. Bei der Parameterdarstellung der Rotationsfläche wurde aber $x(u) > 0$ vorausgesetzt, um Zulässigkeit sicherzustellen. Man hätte den Parameterbereich zunächst auf

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq u \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

mit $\varepsilon > 0$ einschränken können. Da der Integrand jedoch für $u = 0$ stetig ist, lässt sich die obige Rechnung durch den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ rechtfertigen. Ähnlich kann man in analogen Situationen schließen.

Beispiel 3: Flächeninhalt der Torusoberfläche

Die Parameterdarstellung (3.17) entsteht durch Rotation eines Kreises

$$\left. \begin{aligned} x &= R + r \cos u, \\ z &= r \sin u, \end{aligned} \right\} 0 \leq u \leq 2\pi$$

um die z -Achse. Aus dem Resultat für die Rotationsfläche folgt

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r \cos u) \sqrt{r^2 \sin^2 u + r^2 \cos^2 u} \, du \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r \cos u) \, du = 4\pi^2 Rr. \end{aligned}$$

Beispiel 4: Flächeninhalt einer Kugelkalotte

Ein zur z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems coaxialer Zylinder vom Radius a schneidet aus einer zum Ursprung konzentrischen Kugel vom Radius $R > a$ zwei *Kugelkalotten* heraus. Es ist der Flächeninhalt einer solchen Kugelkalotte zu berechnen.

Wir verwenden Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) . Damit lässt sich auf sehr einfache Weise eine Parameterdarstellung der Kugelkalotte angeben,

$$r = R, \quad 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

mit

$$\sin \vartheta_0 = \frac{a}{R} \quad (\text{Skizze!}).$$

Für den Normalenvektor gilt

$$\begin{aligned} \pm \vec{n} &= \vec{t}_\vartheta \times \vec{t}_\varphi = g_\vartheta g_\varphi \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi \\ &= g_\vartheta g_\varphi \vec{e}_r = R^2 \sin \vartheta \vec{e}_r. \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Werte für die Maßstabskoeffizienten auf einer Kugelschale $r = R$ aus Abschnitt 2.4.3 verwendet. Für das vektorielle Flächenelement einer Kugelschale mit Radius R gilt daher die wichtige Beziehung

$$\pm d\vec{A} = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, \vec{e}_r.$$

Das Vorzeichen ergibt sich aus der Orientierung der Kugelschale, die in der Aufgabenstellung nicht festgelegt wurde. Für den Flächeninhalt bekommt man damit

$$\begin{aligned} A &= \iint_A dA = R^2 \int_0^{\vartheta_0} \left(\int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\varphi \right) d\vartheta \\ &= 2\pi R^2 \int_0^{\vartheta_0} \sin \vartheta \, d\vartheta = -2\pi R^2 \cos \vartheta \Big|_0^{\vartheta_0} \\ &= 2\pi R^2 (1 - \cos \vartheta_0) = 2\pi R^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} \right). \end{aligned}$$

Bemerkung: Bei der Berechnung des vektoriellen Flächenelementes von Koordinatenflächen in krummlinigen orthogonalen Koordinaten kann man immer so wie im Beispiel vorgehen. Die Resultate für Kreiszyylinder-Koordinaten und Kugelkoordinaten sind in Tabelle 3.2 zusammengestellt.

Beispiel 5: Fluss eines Vektorfeldes durch eine Sattelfläche

In kartesischen Koordinaten ist das Vektorfeld $\vec{v} = (y, x, z^2 + 1)$ gegeben. Es soll der Fluss Ψ des Vektorfeldes durch den innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 \leq 1$ liegenden Teil der *Sattelfläche* $z = xy$ berechnet werden, Abb. 3.6.

Tabelle 3.2: Vektorielle Flächenelemente für die Koordinatenflächen von Kreiszyylinder- und Kugelkoordinaten. Kreiszylindermäntel und Kugeloberflächen treten in den Anwendungen häufig auf.

Kreiszyylinder-Koordinaten (ρ, φ, z)		
Kreiszylindermäntel	$\rho = c_1$	$\pm d\vec{A} = \rho d\varphi dz \vec{e}_\rho$
Halbebenen	$\varphi = c_2$	$\pm d\vec{A} = dz d\rho \vec{e}_\varphi$
Ebenen	$z = c_3$	$\pm d\vec{A} = \rho d\rho d\varphi \vec{e}_z$
Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)		
Kugeloberflächen	$r = c_1$	$\pm d\vec{A} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \vec{e}_r$
Kreiskegelmäntel	$\vartheta = c_2$	$\pm d\vec{A} = r \sin \vartheta d\varphi dr \vec{e}_\vartheta$
Halbebenen	$\varphi = c_3$	$\pm d\vec{A} = r dr d\vartheta \vec{e}_\varphi$

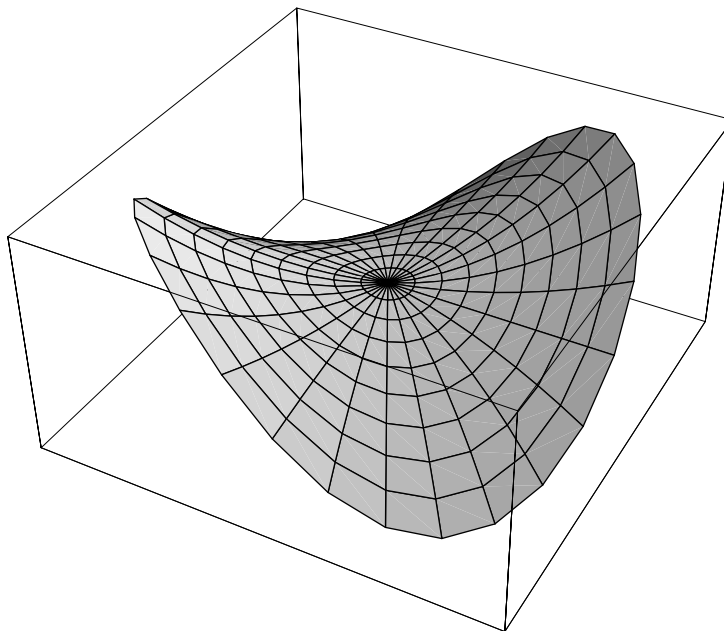


Bild 3.6: Ausschnitt aus einer Sattelfläche

Wir verwenden Zylinderkoordinaten. In Zylinderkoordinaten lautet die Gleichung der Sattelfläche

$$z = \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi = \frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Für den Ortsvektor gilt

$$\vec{r}(\rho, \varphi) = \rho \vec{e}_\rho(\varphi) + \frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi \vec{e}_z,$$

und für die Tangentenvektoren

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \vec{e}_\rho(\varphi) + \rho \sin 2\varphi \vec{e}_z, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= \rho \vec{e}_\varphi(\varphi) + \rho^2 \cos 2\varphi \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Dabei wurde

$$\frac{\partial \vec{e}_\rho(\varphi)}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

verwendet. Für den Normalenvektor erhält man

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\rho^2 \sin 2\varphi \vec{e}_\rho - \rho^2 \cos 2\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \vec{e}_z.$$

Als nächstes rechnen wir das Vektorfeld in Zylinderkoordinaten um. Man bekommt

$$\begin{aligned} v_\rho &= v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi = y \cos \varphi + x \sin \varphi \\ &= \rho \sin \varphi \cos \varphi + \rho \cos \varphi \sin \varphi = \rho \sin 2\varphi, \\ v_\varphi &= -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi = -\rho \sin^2 \varphi + \rho \cos^2 \varphi \\ &= \rho(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \rho \cos 2\varphi, \\ v_z &= z^2 + 1 = \frac{\rho^4}{4} \sin^2(2\varphi) + 1. \end{aligned}$$

Für den Fluss Ψ durch die gegebene Fläche A erhält man

$$\begin{aligned} \Psi &= \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(-\rho^3 + \frac{\rho^5}{4} \sin^2 2\varphi + \rho \right) d\varphi \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(-\rho^3 + \frac{\rho^5}{8} + \rho \right) d\rho \\ &= 2\pi \left(-\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^6}{48} + \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{13}{24} \pi. \end{aligned}$$

3.3 Gebiete in E_3

Zum Abschluss übertragen wir den Begriff des Gebietsintegrals auf den dreidimensionalen Fall. Dazu betrachten wir einen dreidimensionalen *regulären Bereich* B , an den folgende Anforderungen gestellt werden:

- B ist eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes \mathbb{R}^3 . Das Innere $B \setminus \partial B$ ist nicht leer.
- B ist abgeschlossen und beschränkt.
- Der Bereich soll sich durch endlich viele Schnitte parallel zu den Koordinatenebenen in *Normalbereiche* einteilen lassen, siehe Abb. 3.7. $B \subset \mathbb{R}^3$ heißt Normalbereich, wenn

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $c(x) \leq d(x)$ und $\phi(x, y) \leq \psi(x, y)$ gilt. Gegebenenfalls müssen die Koordinaten geeignet vertauscht werden.

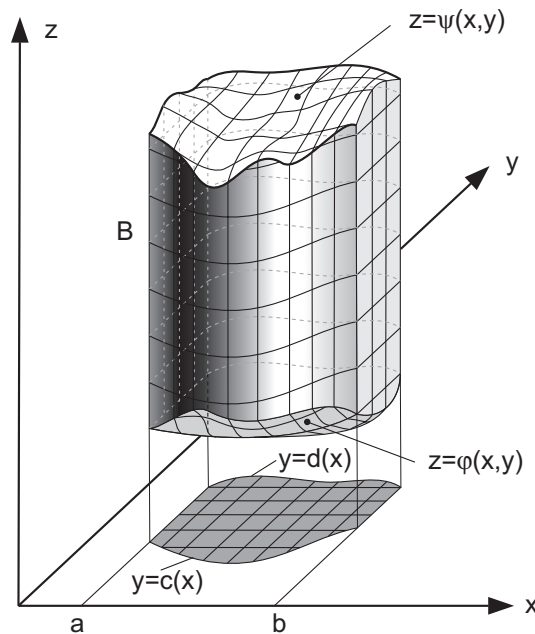


Bild 3.7: Räumlicher Normalbereich. Die Funktionen $c(x) \leq d(x)$ und $\phi(x, y) \leq \psi(x, y)$ sind stetig differenzierbar.

Wir gehen von einer stetigen Funktion $f(x, y, z)$ aus, die auf einem regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ definiert ist. Um das *räumliche Gebietsintegral*

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

zu erklären, wird der Bereich B in einen achsenparallelen Quader Q einbeschrieben und f außerhalb von B durch die Nullfunktion fortgesetzt. Als nächstes wird eine Zerlegung eingeführt, wobei Quader Q_{ijk} an die Stelle der Rechtecke R_{ij} treten. Das Gebietsintegral von f über B wird wieder als Grenzwert einer Riemannsumme definiert,

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_k) \rightarrow 0} S(f; Z). \quad (3.34)$$

Das räumliche Gebietsintegral besitzt die durch die Gleichungen (3.19) bis (3.22) beschriebenen Eigenschaften, nämlich *Linearität* und *Monotonie*, *Additivität* bezüglich des Integrationsbereiches, sowie Gültigkeit des *Mittelwertsatzes*

$$\exists(\xi, \eta, \zeta) \in B : \iiint_B f \, dx \, dy \, dz = f(\xi, \eta, \zeta) \iiint_B dx \, dy \, dz. \quad (3.35)$$

Zur Berechnung von räumlichen Gebietsintegralen zerlegt man den Bereich B in Normalbereiche. Die Berechnung lässt sich dann mit Hilfe des *Satzes von Fubini* auf die Berechnung eindimensionaler Integrale zurückführen. Für den in Abb. 3.7 dargestellten Fall gilt beispielsweise

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx. \quad (3.36)$$

Besonders einfach gestaltet sich die Integration für ein quaderförmiges Gebiet. Die Grenzen sind dann konstant, und die Integrationsreihenfolge darf beliebig vertauscht werden.

Mit dem bislang Gesagten ist auch das Problem der Definition und Berechnung von Integralen über räumliche Gebiete im dreidimensionalen Euklidisch-affinen Raum E_3 gelöst, denn nach Einführung eines kartesischen Koordinatensystems kann ein räumliches Gebiet V einfach mit dem Bereich B identifiziert werden.

Um analog wie bei den Kurven und Flächen vorzugehen, und um auch andere als kartesische Koordinaten zuzulassen, wollen wir auch räumliche Gebiete im allgemeinen durch eine Parameterdarstellung beschreiben. Sie lautet

$$V : B \rightarrow E_3 : (u, v, w) \mapsto \vec{r} = \vec{r}(u, v, w), \quad (3.37)$$

mit einem regulären *Parameterbereich* $B \subset \mathbb{R}^3$. Hält man zwei der drei Parameter fest und variiert den dritten, entstehen Kurven in V , die *Parameterlinien*. Es gibt die drei Kurvenscharen

$$\begin{aligned} C_{(v,w)} : u &\mapsto \vec{r} = \vec{r}(u, v, w), & u\text{-Linien,} \\ C_{(w,u)} : v &\mapsto \vec{r} = \vec{r}(u, v, w), & v\text{-Linien,} \\ C_{(u,v)} : w &\mapsto \vec{r} = \vec{r}(u, v, w), & w\text{-Linien.} \end{aligned}$$

Ein räumliches Gebiet V heißt *stetig differenzierbar*, wenn es eine Parameterdarstellung (3.37) gibt, die folgende Forderungen erfüllt:

1. Die Parameterlinien $C_{(v,w)}$, $C_{(w,u)}$, $C_{(u,v)}$ sind stetig differenzierbar.
2. Die Tangentenvektoren

$$\begin{aligned} \vec{t}_u(u, v, w) &= \frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial u}, \\ \vec{t}_v(u, v, w) &= \frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial v}, \\ \vec{t}_w(u, v, w) &= \frac{\partial \vec{r}(u, v, w)}{\partial w} \end{aligned} \quad (3.38)$$

sind in jedem Punkt linear unabhängig. Das ist genau dann der Fall, wenn das Spatprodukt

$$\mu(u, v, w) = (\vec{t}_u(u, v, w) \times \vec{t}_v(u, v, w)) \cdot \vec{t}_w(u, v, w) \neq 0 \quad (3.39)$$

für alle $(u, v, w) \in B$ ist.

3. Die Parameterdarstellung (3.37) braucht nicht umkehrbar eindeutig zu sein. Falls es Parameterwerte $(u_1, v_1, w_1) \neq (u_2, v_2, w_2)$ mit $\vec{r}(u_1, v_1, w_1) = \vec{r}(u_2, v_2, w_2)$ gibt, so wird zusätzlich noch $\mu(u_1, v_1, w_1) = \mu(u_2, v_2, w_2)$ gefordert.

Jede solche Parameterdarstellung wird als *zulässig* bezeichnet.

Um zu einem Ausdruck für den Rauminhalt des Gebietes zu kommen, umgeben wir den Parameterbereich mit einem Quader Q und führen eine Zerlegung in Teilquader

$$Q_{ijk} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}] \times [w_k, w_{k+1}]$$

durch. Durch die Parameterdarstellung (3.37) bildet sich jeder Teilquader auf ein Teilvolumen ab, welches im allgemeinen durch gekrümmte Flächen begrenzt wird. Wir wählen einen Punkt $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ im Inneren des Teilquaders und linearisieren die Abbildung $\vec{r}(u, v, w)$ um diesen Punkt,

$$\vec{r}(u, v, w) \approx \vec{r}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) + \vec{t}_u(u - \bar{u}) + \vec{t}_v(v - \bar{v}) + \vec{t}_w(w - \bar{w}).$$

In dieser linearisierten Darstellung wird das Volumenelement durch ein Parallelepipiped mit dem Rauminhalt

$$\begin{aligned}\Delta V_{ijk} &= \mu(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)(w_{k+1} - w_k) \\ &= \mu(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})\Delta u_i\Delta v_j\Delta w_k\end{aligned}$$

approximiert. Wir setzen noch $\mu = 0$ für solche Quader, die mindestens einen Punkt enthalten, der nicht zu B gehört. Die Summe

$$V \approx \sum_{i,j,k} \Delta V_{ijk} = \sum_{i,j,k} \mu(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})\Delta u_i\Delta v_j\Delta w_k$$

kann als Näherung für den Rauminhalt V angesehen werden. Dabei wird die Näherung umso besser sein, je feiner die Zerlegung gewählt wurde. Deshalb betrachten wir wieder eine Folge $\{Z_1, Z_2, Z_3, \dots\}$ von Zerlegungen, deren Feinheitsgrad $\delta(Z_l)$ gegen Null konvergiert, und definieren

$$V \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_l) \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} \Delta V_{ijk} = \iiint_V dV. \quad (3.40)$$

Unter den hier getroffenen Voraussetzungen (regulärer Bereich B , stetige Funktion $\mu(u, v, w)$ auf B) konvergiert die Riemann-Summe gegen das Integral Also gilt

$$V = \iiint_V dV = \iiint_B \mu(u, v, w) du dv dw. \quad (3.41)$$

Dadurch konnte das Problem der Rauminhaltsberechnung auf ein räumliches Gebietsintegral im Parameterbereich zurückgeführt werden. Das Symbol dV nennt man *Volumenelement*. Man kann zeigen, dass der Wert des Integrals (3.41) ganz unabhängig von der Wahl einer zulässigen Parameterdarstellung ist. Für das Volumenelement gilt deshalb

$$\begin{aligned}dV &= \mu(u, v, w) du dv dw \\ &= (\vec{t}_u(u, v, w) \times \vec{t}_v(u, v, w)) \cdot \vec{t}_w(u, v, w) du dv dw.\end{aligned} \quad (3.42)$$

Auf analoge Weise kann man das Volumenintegral über ein im räumlichen Gebiet V definiertes, stetiges Skalarfeld $\lambda(\vec{r})$ erklären. Es gilt

$$\begin{aligned}\iiint_V \lambda(\vec{r}) dV &\stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\delta(Z_k) \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk} \Delta V_{ijk} \\ &= \iiint_B \lambda(\vec{r}(u, v, w)) \mu(u, v, w) du dv dw.\end{aligned} \quad (3.43)$$

Dabei ist $\lambda_{ijk} = \lambda(\vec{r}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}))$.

Zahlreiche Begriffe der Physik und Technik führen auf Gebietsintegrale. Als Beispiel seien einige Grundbegriffe aus der Mechanik genannt. Es sei V ein dreidimensionaler Körper, dessen Dichte $\rho(\vec{r})$ stetig von \vec{r} abhängt. Seine *Masse* m ist durch

$$m = \iiint_V \rho(\vec{r}) \, dV$$

und sein *Schwerpunkt* \vec{r}_S durch

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \iiint_V \vec{r} \rho(\vec{r}) \, dV$$

gegeben. Ist g eine Gerade im E_3 , und bedeutet $d(\vec{r}, g)$ den Abstand des Punktes \vec{r} von g , so bezeichnet man das Gebietsintegral

$$T_g = \iiint_V d(\vec{r}, g)^2 \rho(\vec{r}) \, dV$$

als das *Trägheitsmoment* des Körpers bezüglich der Achse g .

3.3.1 Beispiele

Beispiel 1: Volumenelement in orthogonalen Koordinaten

In einem orthogonalen positiv orientierten Koordinatensystem (u_1, u_2, u_3) gilt für das Volumenelement

$$\begin{aligned} dV &= (\vec{t}_1 \times \vec{t}_2) \cdot \vec{t}_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3 \\ &= g_1 g_2 g_3 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3 \\ &= g_1 g_2 g_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3 \\ &= g_1 g_2 g_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3. \end{aligned}$$

Das Volumenelement ist unmittelbar aus den Maßstabskoeffizienten g_i berechenbar. Die Resultate für Standard-Koordinatensysteme sind in Tabelle 3.3 zusammengestellt.

Beispiel 2: Rauminhalt eines Rotationskörpers

(Vergleiche auch Abschnitt 3.2.3, Beispiel 1.) Betrachtet wird ein regulärer Bereich B in der xz -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems, mit $x > 0$. Durch Rotation dieses Bereiches um die z -Achse entsteht ein *Rotationskörper*. Man gebe eine zulässige Parameterdarstellung des Rotationskörpers in Zylinderkoordinaten an und berechne seinen Rauminhalt.

Eine zulässige Parameterdarstellung des Rotationskörpers in Zylinderkoordinaten lautet

$$\vec{r} = \vec{r}(r, \varphi, z) \quad \text{mit} \quad (r, z) \in B, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Für den Rauminhalt gilt dann

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \iint_B \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi \\ &= 2\pi \iint_B \rho \, d\rho \, dz. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Bereichs B mit

$$A = \iint_B d\rho \, dz.$$

Aufgrund des Mittelwertsatzes existiert ein $(\rho_0, z_0) \in B$ mit $\rho_0 > 0$, so dass gilt:

$$\rho_0 A = \iint_B \rho \, d\rho \, dz.$$

Der Rauminhalt des Drehkörpers lässt sich also aus dem Flächeninhalt seiner Querschnittsfläche und dem Kreisumfang $2\pi\rho_0$ als

$$V = 2\pi\rho_0 A$$

berechnen, das ist die *Guldin'sche Regel*. Für den Achsenabstand ρ_0 gilt dabei

$$\rho_0 = \frac{1}{A} \iint_B \rho \, d\rho \, dz.$$

Beispiel 3: Axiales Trägheitsmoment des Würfels

Es soll das axiale Trägheitsmoment des Würfels $-a \leq x, y, z \leq a$ bezüglich der z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems berechnet werden. Seine Dichte ist konstant und darf zu Eins gesetzt werden.

Tabelle 3.3: Volumenelement in kartesischen Koordinaten, Kreiszyylinder-Koordinaten und Kugelkoordinaten.

Kartesische Koordinaten	$dV = dx \, dy \, dz$
Kreiszyylinder-Koordinaten	$dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$
Kugelkoordinaten	$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$

Für den Abstand zur Achse gilt hier

$$d(\vec{r}(x, y, z), g)^2 = x^2 + y^2.$$

Damit erhält man für das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} T_g &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= 2a \int_{-a}^a \int_{-a}^a (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= 2a \int_{-a}^a \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-a}^a \, dx \\ &= 2a \int_{-a}^a \left(2ax^2 + \frac{2}{3} a^3 \right) \, dx \\ &= 2a^2 \left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} a^2 x \right) \Big|_{-a}^a = \frac{16}{3} a^5. \end{aligned}$$

Beispiel 4: Axiales Trägheitsmoment der Kugel

Es soll das axiale Trägheitsmoment der Kugel mit Radius a bezüglich einer Achse durch den Kugelmittelpunkt berechnet werden. Ihre Dichte ist konstant und darf zu Eins gesetzt werden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems als Bezugsachse gewählt werden. Für das Trägheitsmoment gilt dann

$$T_g = \iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

oder in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} T_g &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a r^2 \sin^2 \vartheta \, r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= 2\pi \frac{a^5}{5} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &= -2\pi \frac{a^5}{5} \int_1^{-1} (1 - u^2) \, du = 2\pi \frac{a^5}{5} \left(u - \frac{1}{3} u^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{15} \pi a^5. \end{aligned}$$

Beispiel 5*: Dreidimensionales Gebietsintegral

Man berechne

$$\iiint_V xy \, dV,$$

wobei V das von der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, dem Paraboloid $x^2 + y^2 - 2z = 0$ und den Ebenen $y = 0$ und $x = 0$ eingeschlossene Teilgebiet ist (Skizze, Kugelkoordinaten!).

Das Integrationsgebiet ist ein Ausschnitt aus einem rotationssymmetrischen Gebiet. Es genügt daher, die Schnittkurven der Kugel und des Paraboloids mit der Ebene $y = 0$ zu betrachten. Deren Gleichungen definieren mögliche Schnittpunkte als Lösung von

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + z^2 = 3 \\ x^2 - 2z = 0 \end{array} \right\}.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die Lösung $(x, z) = (\pm\sqrt{2}, 1)$.

Entsprechend dem Hinweis gehen wir zu Kugelkoordinaten über. Dort lautet die Gleichung der Kugel

$$r = \sqrt{3}$$

und jene des Paraboloids

$$r^2 \sin^2 \vartheta - 2r \cos \vartheta = 0.$$

Wenn man Punkte auf der z -Achse zunächst ausschließt, darf man durch $r \sin^2 \vartheta$ dividieren, und findet

$$r(\vartheta) = \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta},$$

dabei ist $r(\vartheta) = 0$ für $\vartheta = \pi/2$.

Die oben berechneten Schnittpunkte liegen auf dem Kreis

$$r = \sqrt{3}, \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{mit} \quad \cos \vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \vartheta_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Laut Aufgabenstellung soll das Teilgebiet zwischen den Ebenen $y = 0$ und $x = 0$ betrachtet werden, das heißt

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Aus diesen Überlegungen findet man folgende Darstellung für den Parameterbereich

$$B = \{(r, \vartheta, \varphi) : 0 \leq r \leq b(\vartheta), 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\},$$

mit

$$b(\vartheta) = \begin{cases} \sqrt{3} & 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0, \\ \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} & \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Der Integrand muss noch in Kugelkoordinaten umgerechnet werden,

$$f = xy = r^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi = \frac{r^2}{2} \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi.$$

Nach diesen Vorarbeiten kann das Integral berechnet werden,

$$\begin{aligned} \iiint_V xy \, dV &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\vartheta=0}^{1/2} \int_{r=0}^{b(\vartheta)} \frac{r^2}{2} \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{b(\vartheta)} r^4 \sin^3 \vartheta \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} \, dr \, d\vartheta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{b(\vartheta)} r^4 \sin^3 \vartheta \, dr \, d\vartheta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^{b(\vartheta)} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \\ &= \frac{1}{10} \left(\int_0^{\vartheta_0} 9\sqrt{3} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta + \int_{\vartheta_0}^{\pi/2} \frac{32 \cos^5 \vartheta}{\sin^{10} \vartheta} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \right) \\ &= \frac{1}{10} \left(9\sqrt{3} \int_0^{\vartheta_0} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta + 32 \int_{\vartheta_0}^{\pi/2} \frac{\cos^5 \vartheta}{\sin^7 \vartheta} \, d\vartheta \right). \end{aligned}$$

Die beiden verbleibenden Integrale können durch Substitution geschlossen integriert werden. Für das erste Integral setzt man $u = \cos \vartheta$ und bekommt

$$\begin{aligned} \int_0^{\vartheta_0} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta &= \int_{\cos \vartheta_0}^1 (1 - u^2) \, du \\ &= \left(u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{1/\sqrt{3}}^1 = \frac{2}{3} - \frac{8}{27} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral substituiert man $v = \sin \vartheta$ und erhält

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi/2} \frac{\cos^5 \vartheta}{\sin^7 \vartheta} \, d\vartheta = \int_{\sin \vartheta_0}^1 \frac{(1 - v^2)^2}{v^7} \, dv$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\sin \vartheta_0}^1 \left(\frac{1}{v^7} - \frac{2}{v^5} + \frac{1}{v^3} \right) dv \\ &= \left(-\frac{1}{6v^6} + \frac{1}{2v^4} - \frac{1}{2v^2} \right) \Big|_{\sqrt{6}/3}^1 \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{9}{48} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Also ergibt sich das Integral zu

$$\iiint_V xy \, dV = \frac{1}{10} \left(6\sqrt{3} - 8 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{5} \left(3\sqrt{3} - \frac{11}{3} \right).$$

Kapitel 4

Differentialoperatoren und Integralsätze

4.1 Gradient und Hauptsatz der Integralrechnung

4.1.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten

Wir gehen von folgender Situation aus: Gegeben ist ein stetig differenzierbares Skalarfeld $\lambda(\vec{r})$, welches auf einem Teilgebiet Ω des E_3 definiert ist. Wir wollen versuchen, ein auf Ω definiertes stetiges Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ so zu konstruieren, dass

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lambda(\vec{r}_2) - \lambda(\vec{r}_1) \quad (4.1)$$

für jede hinreichend glatte Kurve $C \subset \Omega$ gilt. Dabei ist \vec{r}_1 der Anfangs- und \vec{r}_2 der Endpunkt der Kurve C . Die Konstruktion des Vektorfeldes \vec{a} soll in einem krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem (u_1, u_2, u_3) erfolgen. Dann besitzt \vec{a} in jedem Punkt die Komponentenzerlegung

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3.$$

Wählt man als Kurve C einen Ausschnitt aus der i -ten Koordinatenlinie $u_i \in [a, b]$, zum Beispiel $i = 1$, dann bekommt man für das vektorielle Linienelement

$$d\vec{r} = \vec{t}_1 du_1 = g_1 \vec{e}_1 du_1$$

und für

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = a_1 g_1 du_1.$$

Damit ist

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_a^b a_1 g_1 du_1.$$

Wendet man auf das Integral den Mittelwertsatz an, findet man

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = (a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\bar{u})} (b-a) \quad \text{mit } \bar{u} \in (a, b).$$

Zusammen mit (4.1) ist

$$(a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\bar{u})} = \frac{\lambda(\vec{r}(b, u_2, u_3)) - \lambda(\vec{r}(a, u_2, u_3))}{b-a}.$$

Im Grenzwert $b \rightarrow a$ findet man

$$(a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a)} = \frac{\partial \lambda(\vec{r}(u_1, u_2, u_3))}{\partial u_1} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a, u_2, u_3)},$$

oder

$$a_1 = \frac{1}{g_1} \frac{\partial \lambda(\vec{r}(u_1, u_2, u_3))}{\partial u_1}.$$

Für die anderen Koordinaten des Vektorfeldes \vec{a} kann man genauso vorgehen. Wir setzen

$$\tilde{\lambda}(u_1, u_2, u_3) = \lambda(\vec{r}(u_1, u_2, u_3))$$

und finden damit

$$\vec{a} = \frac{1}{g_1} \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial u_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{g_2} \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{g_3} \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial u_3} \vec{e}_3. \quad (4.2)$$

Wenn also ein Vektorfeld existiert, das für beliebige $C \subset \Omega$ die Bedingung (4.1) erfüllt, muss es in einem krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem die Gestalt (4.2) besitzen. Der durch die Berechnungsvorschrift (4.2) erklärte Differentialoperator ist der *Gradient* des gegebenen Skalarenfeldes. Wir halten noch einmal explizit fest

$$\text{grad } \lambda = \frac{1}{g_1} \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{g_2} \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{g_3} \frac{\partial \lambda}{\partial u_3} \vec{e}_3. \quad (4.3)$$

Hierbei wurde die Tilde weggelassen. In den Anwendungen wird meistens nicht zwischen einem Feld und seiner Darstellung in einem gegebenen Koordinatensystem unterschieden, wenn aus dem jeweiligen Kontext hervorgeht, was gemeint ist.

Für die im Abschnitt 2.4 besprochenen Standard-Koordinatensysteme sind die aus (4.3) resultierenden Beziehungen in Tabelle 4.1 zusammengestellt.

Es seien λ , λ_1 und λ_2 stetig differenzierbare Skalarenfelder, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann gilt

$$\text{grad}(c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2) = c_1 \text{grad } \lambda_1 + c_2 \text{grad } \lambda_2, \quad (4.4)$$

Tabelle 4.1: Gradient in Standard-Koordinatensystemen.

Kartesische Koordinaten	(x, y, z)	$\text{grad } \lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \lambda$
Zylinderkoordinaten	(ρ, φ, z)	$\text{grad } \lambda = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \lambda$
Kugelkoordinaten	(r, ϑ, φ)	$\text{grad } \lambda = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \lambda$

das ist die *Linearität*. Es gilt die *Produktregel*

$$\text{grad}(\lambda_1 \lambda_2) = \lambda_1 \text{grad } \lambda_2 + \lambda_2 \text{grad } \lambda_1 \quad (4.5)$$

und die *Kettenregel*

$$\text{grad}\left(f(\lambda(\vec{r}))\right) = f'(\lambda(\vec{r})) \text{grad}(\lambda(\vec{r})). \quad (4.6)$$

Dabei ist mit f' die Ableitung von f nach dem Argument gemeint. Die Linearität (4.4) ist eine unmittelbare Konsequenz des Ansatzes (4.1). Die beiden anderen Regeln (4.5) und (4.6) überprüft man am einfachsten in kartesischen Koordinaten, was bei den Beispielen geschehen soll.

4.1.2 Hauptsatz der Integralrechnung

Ausgangspunkt der Betrachtungen war die mit Gleichung (4.1) verknüpfte Fragestellung. Gegeben ist ein stetig differenzierbares Skalarenfeld λ , welches in diesem Zusammenhang auch *Potential* oder *Potentialfunktion* genannt wird. Gesucht wird ein Vektorfeld \vec{a} , so dass sich die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten als Arbeitsintegral über das Vektorfeld ausdrücken lässt. Integriert wird über eine beliebige Kurve C , die die beiden Punkte verbindet. Wir hatten gezeigt, dass notwendigerweise $\vec{a} = \text{grad } \lambda$ sein muss. Diese Bedingung ist auch hinreichend, das ist der Inhalt des *Hauptsatzes der Integralrechnung*,

$$\int_C \text{grad } \lambda \cdot d\vec{r} = \lambda(\vec{r}_2) - \lambda(\vec{r}_1), \quad (4.7)$$

wobei mit \vec{r}_1 und \vec{r}_2 der Anfangs- beziehungsweise Endpunkt der Kurve C bezeichnet ist. In Worten lautet der Hauptsatz:

Satz 4.1 (*Hauptsatz der Integralrechnung*) Das Arbeitsintegral über den Gradient einer Potentialfunktion ist gleich der Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten des Integrationsweges.

Der Hauptsatz gilt unter folgenden, technische Voraussetzungen: Das Skalarenfeld λ soll auf einer gewissen offenen Menge Ω des E_3 definiert und wenigstens einmal stetig differenzierbar sein, die Kurve $C \subset \Omega$ muss stückweise glatt sein.

Der Hauptsatz kann leicht bewiesen werden. Dazu führt man eine zulässige Parameterdarstellung $\vec{r} = \vec{r}(t)$ der Kurve C ein, $a \leq t \leq b$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_C \text{grad } \lambda \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \text{grad } \lambda(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \lambda(\vec{r}(t)) dt = \lambda(\vec{r}(b)) - \lambda(\vec{r}(a)) \\ &= \lambda(\vec{r}_2) - \lambda(\vec{r}_1), \end{aligned}$$

womit der Satz gezeigt ist. Hierbei wurde von der (verallgemeinerten) Kettenregel Gebrauch gemacht. In kartesischen Koordinaten ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(\vec{r}(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\lambda}(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \text{grad } \lambda(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.1.3 Richtungsableitung

Wir betrachten ein stetig differenzierbares Skalarenfeld $\lambda(\vec{r})$ und die durch den Punkt \vec{r}_0 gehende Gerade

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad |\vec{a}| = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit dem normierten Richtungsvektor \vec{a} . Wegen $|\vec{a}| = 1$ gilt

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = |t\vec{a}| = |t| |\vec{a}| = |t|.$$

Die reelle Zahl t gibt daher bis auf das Vorzeichen den Abstand des Geradenpunktes $\vec{r}(t)$ von \vec{r}_0 an. Man kann den Verlauf des Skalarenfeldes längs der Geraden studieren. Er wird als Funktion einer Veränderlichen durch die Verkettung

$$g(t) = \lambda(\vec{r}(t)) = \lambda(\vec{r}_0 + t\vec{a})$$

beschrieben. Man bezeichnet den Grenzwert

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(\vec{r}_0 + t\vec{a}) - \lambda(\vec{r}_0)}{t}$$

als *Richtungsableitung* des Skalarfeldes λ im Punkt \vec{r}_0 in der Richtung \vec{a} . Man verwendet die Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} \lambda.$$

Setzt man für \vec{a} einen der kartesischen Basisvektoren \vec{e}_i ein, ergibt sich insbesondere

$$\frac{\partial}{\partial \vec{e}_i} \lambda = \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda.$$

Der Begriff der Richtungsableitung ist daher eine Verallgemeinerung des Begriffs der partiellen Ableitung.

Zur Berechnung der Richtungsableitung wenden wir die verallgemeinerte Kettenregel (4.8) auf die Funktion $g(t)$ an. Das liefert

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \vec{a}} \lambda \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} &= g'(0) = \text{grad } \lambda(\vec{r}(0)) \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{t=0} \\ &= \vec{a} \cdot \text{grad } \lambda(\vec{r}_0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Richtungsableitung ergibt sich als Projektion des Gradienten auf den Richtungsvektor \vec{a} .

Wir wollen nun untersuchen, für welche Richtung \vec{a} die Richtungsableitung bei festgehaltenem \vec{r}_0 den größten Wert besitzt. Dazu benötigen wir die *Schwarz'sche Ungleichung*

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|. \quad (4.10)$$

In der Schwarz'schen Ungleichung gilt genau dann das Gleichheitszeichen, wenn \vec{a} und \vec{b} linear abhängig sind, das heißt wenn $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b} = r\vec{a}$ mit $r \in \mathbb{R}$ gilt.

Wenn $\text{grad } \lambda = 0$ ist, dann verschwinden nach (4.9) alle Richtungsableitungen. Wir können uns daher auf den Fall $\text{grad } \lambda \neq 0$ beschränken. Aus (4.9) bekommt man mit (4.10) wegen $|\vec{a}| = 1$ im Punkt \vec{r}_0

$$\left| \frac{\partial}{\partial \vec{a}} \lambda \right| = |\vec{a} \cdot \text{grad } \lambda| \leq |\text{grad } \lambda|.$$

Es gilt genau dann das Gleichheitszeichen, falls

$$\vec{a} = \pm \frac{\text{grad } \lambda}{|\text{grad } \lambda|}$$

gilt, und dann ist

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} \lambda = \pm |\text{grad } \lambda|.$$

Zusammenfassend kann man also folgendes sagen: Das Skalarenfeld λ sei in einer Umgebung von \vec{r}_0 stetig differenzierbar, und es gelte $\text{grad } \lambda(\vec{r}_0) \neq 0$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Richtung \vec{a} , für die die Richtungsableitung von λ in \vec{r}_0 einen maximalen Wert besitzt. Diese Richtung ist gleich der Richtung des Gradientenvektors $\text{grad } \lambda(\vec{r}_0)$, und der maximale Wert der Richtungsableitung ist gleich dem Betrag des Gradienten.

Wenn beispielsweise $\lambda(\vec{r})$ eine stetig differenzierbare Temperaturverteilung im E_3 beschreibt, dann erfolgt der stärkste Temperaturanstieg in Richtung des Gradienten $\text{grad } \lambda(\vec{r})$ und der stärkste Temperaturabfall in der Richtung des Vektors $-\text{grad } \lambda(\vec{r})$. Dieses Ergebnis ist physikalisch von Bedeutung, da mit jeder Temperaturverteilung ein Wärmetransport verbunden ist, der in jedem Punkt \vec{r} in Richtung des stärksten Temperaturabfalls und damit in der Richtung des Vektors $-\text{grad } \lambda(\vec{r})$ erfolgt. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, eine mathematische Beschreibung von Wärmeleitungsprozessen zu entwickeln. Wir werden darauf zurückkommen.

Der Gradient steht senkrecht auf den Flächen konstanter Werte des Skalarenfeldes λ . Wenn eine Fläche konstanter Werte durch eine zulässige Parameterdarstellung $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in B$ gegeben ist, dann gilt

$$\lambda(\vec{r}(u, v)) = \text{const}, \quad (u, v) \in B.$$

Differenziert man diese Gleichung nach den Parametern, erhält man aus der verallgemeinerten Kettenregel (4.8)

$$\text{grad } \lambda \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \text{grad } \lambda \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0.$$

Hierin sind $\vec{t}_u = \partial \vec{r} / \partial u$ und $\vec{t}_v = \partial \vec{r} / \partial v$ gerade die Tangentenvektoren an die Fläche im betrachteten Punkt. Der Gradient steht also senkrecht auf der Tangentialebene und damit senkrecht auf der Fläche. Betrachtet man zum Beispiel das skalare elektrische Potential φ , dann steht das elektrostatische Feld $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ senkrecht auf den Äquipotentialflächen $\varphi = \text{const}$.

4.1.4 Beispiele

Beispiel 1: Produktregel und Kettenregel für Gradienten

Es sollen die Produktregel (4.5) und die Kettenregel (4.6) für Gradienten in kartesischen Koordinaten nachgewiesen werden.

Wir betrachten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ als Darstellungen von Skalarenfeldern in kartesischen Koordinaten (x, y, z) . Wir setzen

$$\vec{a} = \text{grad}(\lambda_1 \lambda_2), \quad \vec{a}_1 = \text{grad}(\lambda_1), \quad \vec{a}_2 = \text{grad}(\lambda_2).$$

Dann ist unter Verwendung der gewöhnlichen Produktregel

$$a_x = \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_2)}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \lambda_1 a_{2,x} + \lambda_2 a_{1,x},$$

ebenso für die y - und z - Koordinaten. Insgesamt ist also

$$\text{grad}(\lambda_1 \lambda_2) = \vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_2 + \lambda_2 \vec{a}_1 = \lambda_1 \text{grad}(\lambda_2) + \lambda_2 \text{grad}(\lambda_1),$$

womit die Produktregel (4.5) bewiesen ist.

Zum Beweis der Kettenregel setzen wir

$$\vec{a} = \text{grad}\left(f(\lambda(\vec{r}))\right), \quad \vec{a}_1 = \text{grad}(\lambda(\vec{r})).$$

Dann ist unter Verwendung der gewöhnlichen Kettenregel

$$a_x = \frac{\partial f(\lambda(\vec{r}))}{\partial x} = f'(\lambda(\vec{r})) \frac{\partial \lambda(\vec{r})}{\partial x} = f'(\lambda(\vec{r})) a_{1,x},$$

ebenso für die y - und z -Koordinaten. Insgesamt ist also

$$\text{grad}\left(f(\lambda(\vec{r}))\right) = \vec{a} = f'(\lambda(\vec{r})) \vec{a}_1 = f'(\lambda(\vec{r})) \text{grad}(\lambda(\vec{r})),$$

womit die Kettenregel (4.6) bewiesen ist.

Beispiel 2: Richtungsableitung

Gegeben ist das ebene Skalarfeld $\lambda(x, y) = x^2 y$ in kartesischen Koordinaten (x, y) . Man berechne seine Richtungsableitung im Punkt $(1, -1)$ in Richtung des Vektors $(1, 3)$. In welcher Richtung steigt das Feld im Punkt $(1, -1)$ am stärksten? Welchen Wert besitzt die maximale Steigung?

Das zugehörige Gradientenfeld ist

$$\text{grad } \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \vec{e}_y = 2xy \vec{e}_x + x^2 \vec{e}_y = (2xy, x^2)$$

und nimmt im Punkt $(1, -1)$ den Wert $(-2, 1)$ an. Die Richtungsableitung in Richtung des Vektors $(1, 3)$ beträgt

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Das Feld steigt am stärksten in Richtung des Gradienten $(-2, 1)$. Die maximale Steigung ergibt sich aus dem Betrag des Gradienten,

$$\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}.$$

Eine Darstellung des Feldes mit Höhenlinien und seines Gradienten mit Vektorpfeilen ist in Abb. 4.1 ersichtlich.

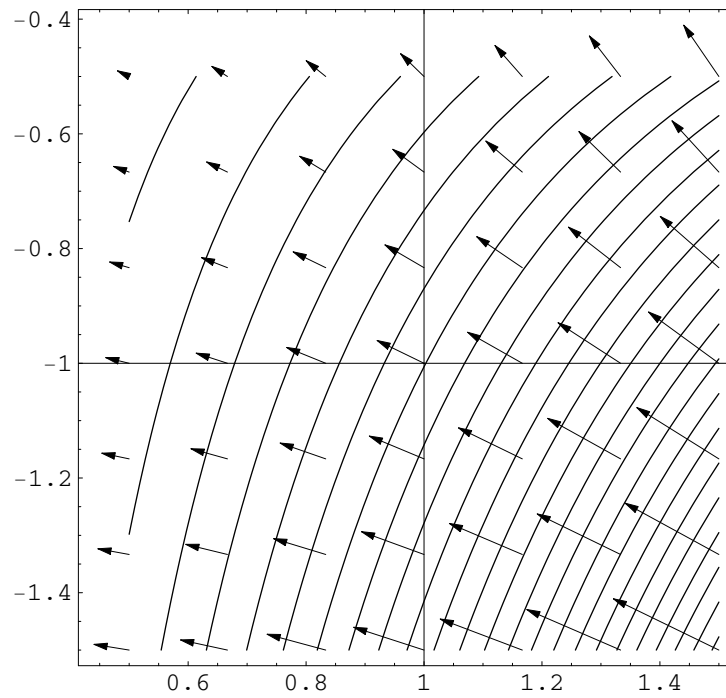


Bild 4.1: Darstellung des Feldes $\lambda(x, y) = x^2y$ mit Höhenlinien und seines Gradienten $\text{grad } \lambda = 2xy \vec{e}_x + x^2 \vec{e}_y$ mit Vektorpfeilen.

4.2 Rotation und Stokes'scher Integralsatz

4.2.1 Definition und Eigenschaften der Rotation

Wir gehen von folgender Situation aus: Gegeben ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$, welches auf einem Teilgebiet Ω des E_3 definiert ist. Wir wollen versuchen, ein auf Ω definiertes stetiges Vektorfeld $\vec{b}(\vec{r})$ so zu konstruieren, dass

$$\iint_A \vec{b} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad (4.11)$$

für jede hinreichend glatte Fläche $A \subset \Omega$ gilt. Dabei ist $C = \partial A$ die Randkurve der Fläche A . Die Konstruktion des Vektorfeldes \vec{b} soll in einem krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem (u_1, u_2, u_3) erfolgen. Dann besitzen die Vektorfelder \vec{a}, \vec{b} in jedem Punkt die Komponentenzerlegungen

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \\ \vec{b} &= b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Wir wenden (4.11) auf die in Abb. 4.2 dargestellte Masche an. Sie liegt in der Koordinatenfläche $u_3 = \text{const}$ und wird von den Koordinatenlinien $u_2 = c, u_1 = b, u_2 = d$ und $u_1 = a$ begrenzt. Wenden wir uns zunächst der linken Seite von (4.11) zu. Das vektorielle Flächenelement lautet

$$d\vec{A} = \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 du_1 du_2 = g_1 g_2 \vec{e}_3 du_1 du_2.$$

Durch diese Vorgehensweise wird eine Orientierung der Fläche festgelegt, der Vektor $+\vec{e}_3$ zeigt in Richtung der Flächennormalen. Weiter ist

$$\vec{b} \cdot d\vec{A} = b_3 g_1 g_2 du_1 du_2$$

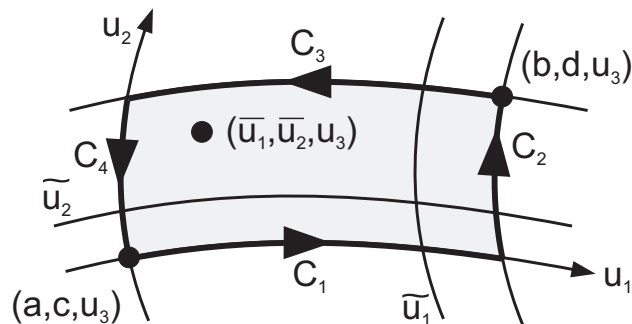


Bild 4.2: Die Gleichung (4.11) wird auf eine Masche angewendet, die in der Koordinatenfläche $u_3 = \text{const}$ liegt. Sie wird von den Koordinatenlinien $u_2 = c, u_1 = b, u_2 = d$ und $u_1 = a$ begrenzt.

und damit

$$\iint_A \vec{b} \cdot d\vec{A} = \int_{u_1=a}^b \int_{u_2=c}^d b_3 g_1 g_2 du_2 du_1.$$

Wendet man auf das Integral den Mittelwertsatz an, findet man

$$\iint_A \vec{b} \cdot d\vec{A} = (b_3 g_1 g_2) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3)} (b-a)(d-c),$$

mit $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in (a, b) \times (c, d)$, siehe Abb. 4.2.

Als nächstes ist das Kurvenintegral auf der rechten Seite von (4.11) zu berechnen. Es ist klar, dass man in vier Teilintegrale $C_1 \dots C_4$ entlang der Koordinatenlinien aufspaltet. Wir demonstrieren das Vorgehen an Hand von C_1 mit $u_2 = c$, $u_1 \in [a, b]$. Dann bekommt man für das vektorielle Linienelement

$$d\vec{r} = \vec{t}_1 du_1 = g_1 \vec{e}_1 du_1$$

und für

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = a_1 g_1 du_1.$$

Damit ist

$$\int_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(u_1, c, u_3)} du_1.$$

Zweckmäßigerweise fasst man die Anteile gegenüberliegender Kanten zusammen, das heißt

$$\int_{C_1+C_3} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left((a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(u_1, c, u_3)} - (a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(u_1, d, u_3)} \right) du_1.$$

Wendet man auf das Integral den Mittelwertsatz an, findet man

$$\int_{C_1+C_3} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \left((a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\tilde{u}_1, c, u_3)} - (a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\tilde{u}_1, d, u_3)} \right) (b-a),$$

mit $\tilde{u}_1 \in (a, b)$. Für die Teilintegrale über C_2 und C_4 erhält man analog aufgebaute Ausdrücke. Setzt man noch $b = a + h$ und $d = c + h$, dann findet man zusammen mit (4.11)

$$\begin{aligned} (b_3 g_1 g_2) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3)} &= -\frac{1}{h} \left((a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\tilde{u}_1, c+h, u_3)} - (a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\tilde{u}_1, c, u_3)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{h} \left((a_2 g_2) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a+h, \tilde{u}_2, u_3)} - (a_2 g_2) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a, \tilde{u}_2, u_3)} \right). \end{aligned}$$

Im Grenzwert $h \rightarrow 0$ gilt

$$(b_3 g_1 g_2) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a,c,u_3)} = - \frac{\partial}{\partial u_2} (a_1 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a,c,u_3)} + \frac{\partial}{\partial u_1} (a_2 g_2) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a,c,u_3)}$$

oder

$$b_3 = \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 a_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (g_1 a_1) \right).$$

Für die anderen Koordinaten des Vektorfeldes \vec{b} kann man genauso vorgehen und bekommt

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \frac{1}{g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} (g_3 a_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (g_2 a_2) \right) \vec{e}_1 \\ &+ \frac{1}{g_3 g_1} \left(\frac{\partial}{\partial u_3} (g_1 a_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (g_3 a_3) \right) \vec{e}_2 \\ &+ \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 a_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (g_1 a_1) \right) \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Wenn also ein Vektorfeld existiert, das für beliebige $A \subset \Omega$ die Bedingung (4.11) erfüllt, muss es in einem krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem die Gestalt (4.12) besitzen. Der durch die Berechnungsvorschrift (4.12) erklärte Differentialoperator ist die *Rotation* des gegebenen Vektorfeldes. In der englischen Literatur wird auch die Schreibweise $\text{curl } \vec{a}$ benutzt. Wir halten noch einmal explizit fest

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \frac{1}{g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} (g_3 a_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (g_2 a_2) \right) \vec{e}_1 \\ &+ \frac{1}{g_3 g_1} \left(\frac{\partial}{\partial u_3} (g_1 a_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (g_3 a_3) \right) \vec{e}_2 \\ &+ \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 a_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (g_1 a_1) \right) \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Man kann $\text{rot } \vec{a}$ auch formal auf verschiedene Arten als Determinante schreiben,

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ g_2 g_3 & g_3 g_1 & g_1 g_2 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1 a_1 & g_2 a_2 & g_3 a_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \begin{vmatrix} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{t}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1 a_1 & g_2 a_2 & g_3 a_3 \end{vmatrix}.$$

Für die im Abschnitt 2.4 besprochenen Standard-Koordinatensysteme sind die aus (4.13) resultierenden Beziehungen in Tabelle 4.2 zusammengestellt.

Tabelle 4.2: Rotation in Standard-Koordinatensystemen.

<p>Kartesische Koordinaten (x, y, z)</p>	$\text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} (\text{rot } \vec{a})_x \\ (\text{rot } \vec{a})_y \\ (\text{rot } \vec{a})_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$
<p>Zylinder- koordinaten (ρ, φ, z)</p>	$\text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} (\text{rot } \vec{a})_\rho \\ (\text{rot } \vec{a})_\varphi \\ (\text{rot } \vec{a})_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$
<p>Kugel- koordinaten (r, ϑ, φ)</p>	$\text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} (\text{rot } \vec{a})_r \\ (\text{rot } \vec{a})_\vartheta \\ (\text{rot } \vec{a})_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta a_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \end{pmatrix}$

Es seien \vec{a} , \vec{a}_1 und \vec{a}_2 stetig differenzierbare Vektorfelder, λ ein stetig differenzierbares Skalarfeld und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann gilt

$$\operatorname{rot}(c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2) = c_1 \operatorname{rot} \vec{a}_1 + c_2 \operatorname{rot} \vec{a}_2, \quad (4.14)$$

das ist die *Linearität*. Es gilt die *Produktregel*

$$\operatorname{rot}(\lambda \vec{a}) = \lambda \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad} \lambda \times \vec{a}. \quad (4.15)$$

Die Linearität (4.14) ist eine unmittelbare Konsequenz des Ansatzes (4.11). Die Produktregel (4.15) überprüft man am einfachsten in kartesischen Koordinaten, was bei den Beispielen geschehen soll.

4.2.2 Der Integralsatz von Stokes

Ausgangspunkt der Betrachtungen war die mit Gleichung (4.11) verknüpfte Fragestellung. Gegeben ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{a} , welches in diesem Zusammenhang auch *Vektorpotential* genannt wird. Gesucht wird ein Vektorfeld \vec{b} , so dass sich das Arbeitsintegral von \vec{a} entlang einer geschlossenen Kurve als Fluss des Vektorfeldes \vec{b} ausdrücken lässt. Integriert wird über eine beliebige über der Kurve aufgespannte Fläche A . Wir hatten gezeigt, dass notwendigerweise $\vec{b} = \operatorname{rot} \vec{a}$ sein muss. Diese Bedingung ist auch hinreichend, das ist der Inhalt des *Integralsatzes von Stokes* (George Gabriel Stokes, 1819-1903),

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{A} = \oint_{C=\partial A} \vec{a} \cdot d\vec{r}. \quad (4.16)$$

In Worten lautet der Integralsatz von Stokes:

Satz 4.2 (*Integralsatz von Stokes*) *Der Fluss der Rotation eines Vektorfeldes durch eine Fläche ist gleich dem Arbeitsintegral entlang der geschlossenen Randkurve der Fläche.*

Der Integralsatz von Stokes gilt unter folgenden technischen Voraussetzungen: Das Vektorfeld \vec{a} soll auf einer gewissen offenen Menge Ω des E_3 definiert und wenigstens einmal stetig differenzierbar sein. A ist eine ganz in Ω enthaltene, stückweise glatte orientierbare Fläche, die von einer stückweise glatten geschlossenen Kurve $C = \partial A$ berandet ist. Die Fläche und die Kurve müssen konsistent orientiert sein. Damit ist gemeint, dass der Durchlaufsinn der Kurve sich mit der Normalenrichtung der Fläche zu einer Rechtsschraube ergänzt.

Man beachte, dass im Integralsatz von Stokes die Fläche A durch jede andere in C eingespannte Fläche ersetzt werden kann. Für den Fluss der Rotation kommt

es nicht auf die genaue Form der Fläche an. Diese Feststellung verallgemeinert die Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals über ein Gradientenfeld.

Der Integralsatz von Stokes soll hier nicht bewiesen werden, obwohl das für Sonderfälle wie die in Abb. 3.5 dargestellte Fläche $z = f(x, y)$ nicht allzu schwer ist. Es sei auf die entsprechende mathematische Literatur verwiesen. Wir wollen stattdessen versuchen, den Begriff der Rotation und die Aussage des Integralsatzes noch etwas zu veranschaulichen.

Aus der Strömungslehre ist der Begriff der *Zirkulation* bekannt. Dazu deuten wir \vec{a} als Strömungsfeld. Die Zirkulation einer Strömung \vec{a} längs einer Kurve C ist durch das Arbeitsintegral

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{a} \cdot \vec{t}_0 dr$$

erklärt. Aufgrund des Mittelwertsatzes existiert ein \bar{a} , so dass gilt

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \bar{a} \int_C dr = \bar{a} s,$$

wobei s die Bogenlänge der Kurve C bezeichnet. Die Zirkulation ist also gerade die mittlere Tangentialgeschwindigkeit \bar{a} des Strömungsfeldes entlang der Kurve, mal deren Bogenlänge.

Mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes kann man zu einer physikalisch-anschaulichen Deutung der Rotation gelangen. Dazu betrachten wir einen Punkt \vec{r}_0 auf einer glatten Fläche A und eine Folge $\{A_n\}$ von Flächenstücken auf A . Die Flächenstücke sollen sämtlich den Punkt \vec{r}_0 enthalten, und ihr Durchmesser soll für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergieren. Bezeichnet man mit A_n zugleich den Inhalt des Flächenstückes, und mit C_n die konsistent zu A_n orientierte Randkurve, so gilt nach Satz (4.16)

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_n} \oint_{C_n} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \frac{1}{A_n} \iint_{A_n} (\text{rot } \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 dA \\ &\rightarrow (\text{rot } \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die Normalkomponente $(\text{rot } \vec{a}) \cdot \vec{n}_0$ von $\text{rot } \vec{a}$ kann als *spezifische Zirkulation* des Strömungsfeldes \vec{a} im Punkt \vec{r}_0 der Fläche A angesehen werden. Insbesondere ist die spezifische Zirkulation bezüglich der Koordinatenfläche $u_j = \text{const}$ durch \vec{r}_0 gleich der j -ten Komponente des Vektors $\text{rot } \vec{a}$.

Integriert man die spezifische Zirkulation über eine Fläche A , addieren sich die Anteile der einzelnen Flächenelemente $d\vec{A}$ auf, und man erhält gerade wieder die Zirkulation entlang der Randkurve. Gerade das wird durch den Integralsatz von Stokes zum Ausdruck gebracht.

Vektorfelder \vec{a} mit $\text{rot } \vec{a} = 0$ werden als *wirbelfrei* bezeichnet. Die Zirkulation eines in einem Gebiet Ω wirbelfreien Vektorfeldes verschwindet für jede in Ω enthaltene geschlossene Kurve.

4.2.3 Beispiele

Beispiel 1: Produktregel für die Rotation

Es soll die Produktregel (4.15) für die Rotation in kartesischen Koordinaten nachgewiesen werden.

Wir betrachten λ und \vec{a} als Darstellungen von Feldern in kartesischen Koordinaten (x, y, z) und führen den Beweis für die z -Komponente. Es ist

$$\begin{aligned} \text{rot}(\lambda \vec{a})|_z &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(\lambda a_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\lambda a_x) \right) \vec{e}_z \\ &= \lambda \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} a_y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} a_x \right) \vec{e}_z \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_x & a_y \end{vmatrix} \vec{e}_z + \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x} & \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ a_x & a_y \end{vmatrix} \vec{e}_z \\ &= \lambda \text{rot } \vec{a}|_z + (\text{grad } \lambda \times \vec{a})|_z. \end{aligned}$$

Der Beweis für die anderen Komponenten kann in gleicher Weise erfolgen.

Beispiel 2: Rotation eines starren Körpers

Ein starrer Körper rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Jeder Punkt \vec{r} des Körpers besitzt dann eine bestimmte Geschwindigkeit \vec{v} . Dem rotierenden Körper kann folglich ein *Geschwindigkeitsfeld* zugeschrieben werden. Man berechne das Geschwindigkeitsfeld und seine Rotation in Zylinderkoordinaten.

Für das Geschwindigkeitsfeld gilt allgemein

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \omega \vec{e}_z \times (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) \\ &= \omega \rho \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Die Rotation dieses Feldes besitzt nur eine z -Komponente, und für deren Koordinate gilt

$$(\text{rot } \vec{v})_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \rho} \vec{e}_z = 2\omega \vec{e}_z.$$

In koordinatenfreier Schreibweise ist also

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}.$$

Die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes stimmt bis auf den Faktor 2 mit der Winkelgeschwindigkeit überein. Diese Feststellung gilt für beliebige Starrkörperbewegungen, wobei $\operatorname{rot} \vec{v}/2$ dann die momentane Winkelgeschwindigkeit gibt.

Beispiel 3: Integralsatz von Stokes

Es wird das Vektorfeld

$$\vec{a} = x \vec{e}_x + (x + y) \vec{e}_y + (x + y + z) \vec{e}_z$$

in einem kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) betrachtet. Gegeben ist außerdem die obere Hemisphäre

$$A: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

Die Normale der Fläche soll in den Halbraum $z > 0$ gerichtet sein. Man berechne folgende Integrale:

$$\mathcal{I}_1 = \oint_{C=\partial A} \vec{a} \cdot d\vec{r}, \quad \mathcal{I}_2 = \iint_A \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{A}, \quad \mathcal{I}_3 = \iint_K \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{A}.$$

Dabei ist mit K die Kreisscheibe in der Ebene $z = 0$ gemeint, die durch den Kreis $C = \partial A$ berandet wird.

Der Rand ∂A der Hemisphäre ist ein Einheitskreis um den Ursprung in der Ebene $z = 0$. Eine zulässige Parameterdarstellung lautet

$$\left. \begin{array}{l} x(u) = \cos u, \\ y(u) = \sin u, \\ z(u) = 0, \end{array} \right\} \quad 0 \leq u < 2\pi.$$

Die gewählte Orientierung der Kurve ist konsistent mit der vorgegebenen Orientierung der Hemisphäre. Daraus bekommt man für das Linienelement in kartesischen Koordinaten

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} du = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} du$$

und für das Vektorfeld

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \cos u + \sin u \\ \cos u + \sin u \end{pmatrix}.$$

Das Integral \mathcal{I}_1 wird damit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \oint_{C=\partial A} \vec{a} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin u \cos u + \cos^2 u + \cos u \sin u) du \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 u du = \pi. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der beiden anderen Integrale wird $\text{rot } \vec{a}$ benötigt. In kartesischen Koordinaten ist

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ x + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ausgehend von Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) lautet eine außerhalb der z -Achse zulässige Parameterdarstellung der Hemisphäre

$$\left. \begin{aligned} x(\vartheta, \varphi) &= \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y(\vartheta, \varphi) &= \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z(\vartheta, \varphi) &= \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Für das Flächenelement findet man

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \vec{e}_r \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= (\sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \end{aligned}$$

und damit

$$\mathcal{I}_2 = \iint_A \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{A}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} (\sin \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi + \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \underbrace{\int_0^{2\pi} (\cos \varphi - \sin \varphi) \, d\varphi}_{=0} + 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \\
 &= \pi \int_0^{\pi/2} \sin 2\vartheta \, d\vartheta = -\frac{\pi}{2} \cos 2\vartheta \Big|_0^{\pi/2} = \pi.
 \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von \mathcal{I}_3 kann man sich zunutze machen, dass die Normale der Kreisscheibe durch den konstanten Vektor \vec{e}_z gegeben ist. Deshalb ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_3 &= \iint_K \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{A} = \iint_K \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{e}_z \, dA \\
 &= \iint_K 1 \, dA = \pi.
 \end{aligned}$$

Aufgrund des Integralsatzes von Stokes müssen alle drei Integrale gleich sein. Darüber hinaus zeigt die Gleichheit von \mathcal{I}_2 und \mathcal{I}_3 , dass es nicht auf die genaue Form der Fläche ankommt, die in die Randkurve eingespannt ist.

4.3 Divergenz und Gauß'scher Integralsatz

4.3.1 Definition und Eigenschaften der Divergenz

Wir gehen von folgender Situation aus: Gegeben ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$, welches auf einem Teilgebiet Ω des E_3 definiert ist. Wir wollen versuchen, ein auf Ω definiertes stetiges Skalarenfeld $\lambda(\vec{r})$ so zu konstruieren, dass

$$\iiint_V \lambda \, dV = \oiint_A \vec{a} \cdot d\vec{A} \quad (4.17)$$

für jedes hinreichend glatte räumliche Gebiet $V \subset \Omega$ gilt. Dabei ist $A = \partial V$ die Hüllfläche des Gebietes V . Die Konstruktion des Skalarenfeldes λ soll in einem krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem (u_1, u_2, u_3) erfolgen. Dann besitzt das Vektorfelder \vec{a} in jedem Punkt die Komponentenzersetzung

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3.$$

Wir wenden (4.17) auf die in Abb. 4.3 dargestellte Box an. Sie wird von den Koordinatenflächen $u_1 = a, u_1 = b, u_2 = c, u_2 = d, u_3 = e$ und $u_3 = f$ begrenzt. Wenden wir uns zunächst der linken Seite von (4.17) zu. Das Volumenelement lautet

$$dV = g_1 g_2 g_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3.$$

Damit ist

$$\iiint_V \lambda \, dV = \int_{u_1=a}^b \int_{u_2=c}^d \int_{u_3=e}^f \lambda g_1 g_2 g_3 \, du_3 \, du_2 \, du_1.$$

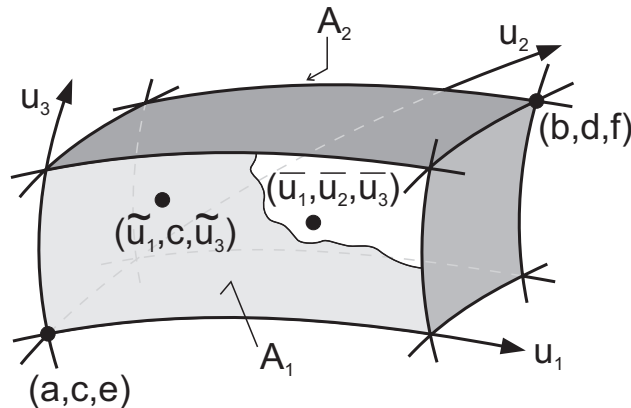


Bild 4.3: Die Gleichung (4.17) wird auf eine Box angewendet, die von den Koordinatenflächen $u_1 = a, u_1 = b, u_2 = c, u_2 = d, u_3 = e$ und $u_3 = f$ begrenzt wird.

Wendet man auf das Integral den Mittelwertsatz an, findet man

$$\iiint_V \lambda \, dV = (\lambda g_1 g_2 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)} (b-a)(d-c)(f-e), \quad (4.18)$$

mit $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \in (a, b) \times (c, d) \times (e, f)$, siehe Abb. 4.3.

Als nächstes ist das Flächenintegral auf der rechten Seite von (4.17) zu berechnen. Es ist klar, dass man in sechs Teilintegrale $A_1 \dots A_6$ über die Koordinatenflächen aufspaltet. Wir demonstrieren das Vorgehen an Hand von A_1 mit $u_2 = c$, $(u_1, u_3) \in [a, b] \times [e, f]$. Dann bekommt man für das vektorielle Flächenelement

$$d\vec{A} = \vec{t}_1 \times \vec{t}_3 \, du_1 \, du_3 = -g_1 g_3 \vec{e}_2 \, du_1 \, du_3$$

und für

$$\vec{a} \cdot d\vec{A} = -a_2 g_1 g_3 \, du_1 \, du_3.$$

Durch diese Vorgehensweise wird eine Orientierung der Fläche festgelegt, der Vektor $-\vec{e}_2$ zeigt in Richtung der Flächennormalen. Die Normalenrichtung der Fläche weist somit von innen nach außen. Damit ist

$$\iint_{A_1} \vec{a} \cdot d\vec{A} = - \int_a^b \int_e^f (a_2 g_1 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(u_1, c, u_3)} \, du_3 \, du_1.$$

Zweckmäßigerweise fasst man die Anteile gegenüberliegender Flächen zusammen, das heißt

$$\int_{A_1+A_3} \vec{a} \cdot d\vec{A} = \int_a^b \int_e^f \left((a_2 g_1 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(u_1, d, u_3)} - (a_2 g_1 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(u_1, c, u_3)} \right) \, du_3 \, du_1.$$

Wendet man auf das Integral den Mittelwertsatz an, findet man

$$\int_{A_1+A_3} \vec{a} \cdot d\vec{A} = \left((a_2 g_1 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\bar{u}_1, d, \bar{u}_3)} - (a_2 g_1 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\bar{u}_1, c, \bar{u}_3)} \right) (b-a)(f-e),$$

mit $(\bar{u}_1, \bar{u}_3) \in (a, b) \times (e, f)$. Setzt man $b = a + h$, $d = c + h$ und $f = e + h$, dann findet man

$$\frac{1}{h^3} \int_{A_1+A_3} \vec{a} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{h} \left((a_2 g_1 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\bar{u}_1, c+h, \bar{u}_3)} - (a_2 g_1 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\bar{u}_1, c, \bar{u}_3)} \right).$$

Im Grenzwert $h \rightarrow 0$ gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_{A_1+A_3} \vec{a} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial u_2} (a_2 g_1 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a, c, e)}.$$

Für die Integrale über die restlichen Teilflächen erhält man analog aufgebaute Ausdrücke.

Aus (4.18) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \iiint_V \lambda \, dV &= \lim_{h \rightarrow 0} (\lambda g_1 g_2 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)} \\ &= (\lambda g_1 g_2 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a, c, e)}, \end{aligned}$$

und zusammen mit (4.17)

$$\begin{aligned} (\lambda g_1 g_2 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a, c, e)} &= \frac{\partial}{\partial u_1} (a_1 g_2 g_3) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a, c, e)} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_2} (a_2 g_3 g_1) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a, c, e)} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_3} (a_3 g_1 g_2) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(a, c, e)} \end{aligned}$$

oder

$$\lambda = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 g_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (g_3 g_1 a_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (g_1 g_2 a_3) \right). \quad (4.19)$$

Wenn also ein Skalarenfeld existiert, das für beliebige $V \subset \Omega$ die Bedingung (4.17) erfüllt, muss es in einem krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem die Gestalt (4.19) besitzen. Der durch die Berechnungsvorschrift (4.19) erklärte Differentialoperator ist die *Divergenz* des gegebenen Vektorfeldes. Wir halten noch einmal explizit fest

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 g_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (g_3 g_1 a_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (g_1 g_2 a_3) \right). \quad (4.20)$$

Für die im Abschnitt 2.4 besprochenen Standard-Koordinatensysteme sind die aus (4.20) resultierenden Beziehungen in Tabelle 4.3 zusammengestellt.

Es seien \vec{a} , \vec{a}_1 , \vec{a}_2 und \vec{b} stetig differenzierbare Vektorfelder, λ ein stetig differenzierbares Skalarenfeld und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann gilt

$$\operatorname{div}(c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2) = c_1 \operatorname{div} \vec{a}_1 + c_2 \operatorname{div} \vec{a}_2, \quad (4.21)$$

das ist die *Linearität*. Es gelten die *Produktregeln*

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{a}) = \lambda \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} \lambda) \cdot \vec{a} \quad (4.22)$$

und

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}. \quad (4.23)$$

Die Linearität (4.21) ist eine unmittelbare Konsequenz des Ansatzes (4.17). Die Produktregeln (4.22) und (4.23) überprüft man am einfachsten in kartesischen Koordinaten, was bei den Beispielen geschehen soll.

Tabelle 4.3: Divergenz in Standard-Koordinatensystemen.

Kartesische Koordinaten (x, y, z)	$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
Zylinder- koordinaten (ρ, φ, z)	$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
Kugel- koordinaten (r, ϑ, φ)	$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta a_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$

4.3.2 Der Integralsatz von Gauß

Ausgangspunkt der Betrachtungen war die mit Gleichung (4.17) verknüpfte Fragestellung. Gegeben ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{a} . Gesucht wird ein Skalarenfeld λ , so dass sich der Fluss von \vec{a} durch eine geschlossene Fläche als Gebietsintegral des Skalarenfeldes λ ausdrücken lässt. Integriert wird über das von der Fläche umhüllte Gebiet V . Wir hatten gezeigt, dass notwendigerweise $\lambda = \operatorname{div} \vec{a}$ sein muss. Diese Bedingung ist auch hinreichend, das ist der Inhalt des *Integralsatzes von Gauß* (Carl Friedrich Gauß, 1777-1855),

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV = \iint_{A=\partial V} \vec{a} \cdot d\vec{A}. \quad (4.24)$$

In Worten lautet der Integralsatz von Gauß:

Satz 4.3 (*Integralsatz von Gauß*) *Das Gebietsintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes ist gleich dem Fluss durch die geschlossene Hüllfläche des Gebietes.*

Der Integralsatz von Gauß gilt unter folgenden, technischen Voraussetzungen: Das Vektorfeld \vec{a} soll auf einer gewissen offenen Menge Ω des E_3 definiert und wenigstens einmal stetig differenzierbar sein. Weiterhin sei das Gebiet V eine von einer stückweise glatten Fläche $A = \partial V$ berandete echte Teilmenge von Ω . Die Fläche muss konsistent zum Gebiet orientiert sein. Damit ist gemeint, dass die Normalenrichtung der Fläche von innen nach außen weist.

Der Integralsatz von Gauß soll hier nicht bewiesen werden, obwohl das für Sonderfälle wie das in Abb. 3.7 dargestellte Normalgebiet nicht allzu schwer ist. Es sei auf die entsprechende mathematische Literatur verwiesen. Wir wollen stattdessen versuchen, den Begriff der Divergenz und die Aussage des Integralsatzes noch etwas zu veranschaulichen.

Dazu deuten wir \vec{a} als Strömungsfeld. Im Abschnitt 3.5, Gleichung (3.32), wurde gezeigt, dass das Flussintegral über eine Fläche A die pro Zeiteinheit durch die Fläche transportierte Stoffmenge gibt. Für inkompressible Strömungen gibt das Flussintegral über eine **geschlossene** Fläche darüber Auskunft, welche Stoffmenge im Inneren des umhüllten Gebietes pro Zeiteinheit erzeugt oder vernichtet wird. Das Integral

$$\oiint_{A=\partial V} \vec{a} \cdot d\vec{A}$$

wird deshalb auch als *Ergiebigkeit* oder *Quellstärke* des Gebietes V bezeichnet.

Mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß kann man zu einer physikalisch-anschaulichen Deutung der Divergenz gelangen. Dazu betrachten wir einen Punkt \vec{r}_0 in einem räumlichen Gebiet V und eine Folge $\{V_n\}$ von Teilgebieten in V , die die Voraussetzungen des Integralsatzes erfüllen. Die Teilgebiete sollen sämtlich den Punkt \vec{r}_0 enthalten, und ihr Durchmesser soll für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergieren. Bezeichnet man mit V_n zugleich den Inhalt des Teilgebietes, und mit A_n die konsistent zu V_n orientierte Hüllfläche, so gilt nach Satz (4.24)

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_n} \oiint_{A_n} \vec{a} \cdot d\vec{A} &= \frac{1}{V_n} \iiint_{V_n} \operatorname{div} \vec{a} \, dV \\ &\rightarrow \operatorname{div} \vec{a} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die Divergenz von \vec{a} kann als *spezifische Ergiebigkeit* oder *Quelldichte* des Strömungsfeldes \vec{a} im Punkt \vec{r}_0 des Gebietes V angesehen werden.

Integriert man die Quelldichte über ein räumliches Gebiet V , addieren sich die Anteile der einzelnen Volumenelemente dV auf, und man erhält gerade wieder die Quellstärke, das heißt den Fluss durch die Hüllfläche. Gerade das wird durch den Integralsatz von Gauß zum Ausdruck gebracht.

Stetig differenzierbare Vektorfelder \vec{a} mit $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ werden als *quellenfrei* bezeichnet. Der Fluss eines in einem Gebiet Ω quellenfreien Vektorfeldes verschwindet für jede in Ω enthaltene geschlossene Fläche.

4.3.3 Beispiele

Beispiel 1: Produktregeln für die Divergenz

Es sollen die Produktregeln (4.22) und (4.23) für die Divergenz in kartesischen Koordinaten nachgewiesen werden.

Wir betrachten λ , \vec{a} , \vec{b} als Darstellungen von Feldern in kartesischen Koordinaten (x, y, z) . Es ist

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda a_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda a_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda a_z)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} a_x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} a_y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} a_z \\
 &= \lambda \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} \lambda) \cdot \vec{a}.
 \end{aligned}$$

Zum Beweis der Produktregel (4.23) betrachten wir zunächst nur die z -Komponente von $\vec{a} \times \vec{b}$, das ist

$$(\vec{a} \times \vec{b})|_z = (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z.$$

Für die Divergenz gilt

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \left((\vec{a} \times \vec{b})|_z \right) &= \frac{\partial}{\partial z} (a_x b_y - a_y b_x) \\
 &= b_y \frac{\partial a_x}{\partial z} - b_x \frac{\partial a_y}{\partial z} - \left(a_y \frac{\partial b_x}{\partial z} - a_x \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) \\
 &= \begin{vmatrix} b_x & b_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_x & a_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Analoge Ausdrücke findet man für die x - und y -Komponenten von $\vec{a} \times \vec{b}$. Addiert man alle drei Ausdrücke, bekommt man

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\
 &= \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}.
 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Integralsatz von Gauß

Es wird das Vektorfeld

$$\vec{a} = 2z \vec{e}_x + (x + y) \vec{e}_y$$

in einem kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) betrachtet. Gegeben ist außerdem eine Kugel K vom Radius R , deren Mittelpunkt sich im Koordinatenursprung befindet. Die Normale der Kugeloberfläche $A = \partial K$ soll nach außen gerichtet sein. Man berechne folgende Integrale:

$$\mathcal{I}_1 = \oiint_{A=\partial K} \vec{a} \cdot d\vec{A}, \quad \mathcal{I}_2 = \iiint_K \operatorname{div} \vec{a} \, dV.$$

Ausgehend von Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) lautet eine außerhalb der z -Achse zulässige Parameterdarstellung der Kugeloberfläche

$$\left. \begin{aligned} x(\vartheta, \varphi) &= R \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y(\vartheta, \varphi) &= R \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z(\vartheta, \varphi) &= R \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Für das Flächenelement findet man

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \vec{e}_r R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= (\sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z) R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \end{aligned}$$

und für das Vektorfeld

$$\vec{a} = R \begin{pmatrix} 2 \cos \vartheta \\ \sin \vartheta (\sin \varphi + \cos \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Integral \mathcal{I}_1 wird damit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \oiint_A \vec{a} \cdot d\vec{A} \\ &= R^3 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(\sin^2 \vartheta (2 \cos \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi)) \right) d\vartheta \, d\varphi \\ &= \pi R^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = \pi R^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &= \pi R^3 \left(-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des anderen Integrals wird $\operatorname{div} \vec{a}$ benötigt. In kartesischen Koordinaten ist

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(2z) + \frac{\partial}{\partial y}(x + y) = 1,$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{a} \, dV \\ &= \iiint_K 1 \, dV = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Aufgrund des Integralsatzes von Gauß müssen beide Integrale identisch sein.

Beispiel 3: Laplace-Operator

Es ist der Ausdruck für den skalaren Laplace-Operator in krummlinigen orthogonalen Koordinaten (u_1, u_2, u_3) anzugeben.

Per Definition gilt für den skalaren Laplace-Operator

$$\Delta \lambda \stackrel{\text{Def}}{=} \text{div grad } \lambda.$$

Setzt man Gradient (4.3) und Divergenz (4.20) in krummlinigen orthogonalen Koordinaten ein, erhält man

$$\Delta \lambda = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial \lambda}{\partial u_3} \right) \right).$$

Dabei muss das Skalarenfeld λ wenigstens zweimal stetig differenzierbar sein. Für die im Abschnitt 2.4 besprochenen Standard-Koordinatensysteme sind die hieraus resultierenden Beziehungen in Tabelle 4.4 zusammengestellt.

Tabelle 4.4: Laplace-Operator in Standard-Koordinatensystemen.

Kartesische Koordinaten (x, y, z)	$\Delta \lambda = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \lambda$
Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)	$\Delta \lambda = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \lambda$
Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)	$\Delta \lambda = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \lambda$

4.4 Lemmata von Poincaré

4.4.1 Erstes Lemma von Poincaré

Aus der geometrischen Anschauung heraus ist klar, dass der Rand einer Fläche eine geschlossene Kurve ist, also randlos. Mit Hilfe des Randoperators ∂ lässt sich dieser Sachverhalt als

$$\partial(\partial A) = \emptyset \quad (4.25)$$

ausdrücken, wobei das Zeichen \emptyset für die leere Menge steht. Genauso ist die Hüllfläche eines räumlichen Gebietes V stets geschlossen,

$$\partial(\partial V) = \emptyset. \quad (4.26)$$

Diese Aussagen über die Topologie von Gebieten und Flächen haben wichtige Konsequenzen für Vektorfelder.

Um dies zu sehen, betrachten wir ein Skalarenfeld λ , welches wenigstens zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Wir wenden der Reihe nach den Stokes'schen Integralsatz und den Hauptsatz der Integralrechnung an, und finden

$$\iint_A (\text{rot grad } \lambda) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} (\text{grad } \lambda) \cdot d\vec{r} = 0. \quad (4.27)$$

Vielleicht bedarf der letzte Schritt noch der Erklärung. Wendet man den Hauptsatz auf eine Kurve an, die den Anfangspunkt \vec{r}_1 mit dem Endpunkt \vec{r}_2 verbindet, gilt bekanntlich

$$\int_C (\text{grad } \lambda) \cdot d\vec{r} = \varphi|_{\vec{r}_2} - \varphi|_{\vec{r}_1}.$$

Lässt man die beiden Punkte zusammenfallen, $\vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_1$, erhält man eine geschlossene Kurve und das Integral verschwindet,

$$\lim_{\vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_1} \int_C (\text{grad } \lambda) \cdot d\vec{r} = \oint_C (\text{grad } \lambda) \cdot d\vec{r} = 0,$$

wovon in (4.27) Gebrauch gemacht wurde. Gleichung (4.27) kann nur dann für ganz beliebige Flächen A gelten, wenn der Integrand verschwindet. Es gilt also

$$\text{rot grad } \lambda = 0. \quad (4.28)$$

Als nächstes wenden wir der Reihe nach den Gauß'schen und dann den Stokes'schen Integralsatz auf den Ausdruck $\text{div rot } \vec{a}$ an, und finden

$$\iiint_V \text{div rot } \vec{a} \, dV = \oiint_{\partial V} \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial(\partial V)} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_{\emptyset} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Dies kann nur dann für ganz beliebige Gebiete V gelten, wenn der Integrand verschwindet. Es gilt also

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0. \quad (4.29)$$

In Worten lauten die Gleichungen (4.28) und (4.29) wie folgt.

Satz 4.4 (1. Lemma von Poincaré [Henri Poincaré, 1854-1912]) *Der Gradient eines beliebigen Skalarfeldes hat keine Wirbel, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \lambda = 0$, und die Rotation eines beliebigen Vektorfeldes hat keine Quellen, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$.*

Dabei müssen die Felder mindestens zweimal stetig differenzierbar sein.

Natürlich lassen sich diese Zusammenhänge auch in Koordinaten nachprüfen. In kartesischen Koordinaten erhält man aus (4.28), beispielsweise für die x -Komponente,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \vec{e}_x = 0,$$

und aus (4.29)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei kommt es wesentlich darauf an, dass die Felder zweimal stetig differenzierbar sind. Dann gilt der *Satz von Schwarz* über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen.

4.4.2 Zweites Lemma von Poincaré

Von besonderem Interesse in der mathematischen Physik ist die Frage, ob auch die Umkehrung des 1. Lemmas von Poincaré gilt. Wenn wir beispielsweise von einem Vektorfeld \vec{a} wissen, dass es in einem Gebiet $\Omega \subset E_3$ wirbelfrei ist,

$$\operatorname{rot} \vec{a} = 0, \quad (4.30)$$

unter welchen Bedingungen kann es dann durch ein *Potential* λ in der Form

$$\vec{a} = \operatorname{grad} \lambda$$

dargestellt werden?

Aus dem 1. Lemma von Poincaré folgt, dass die Wirbelfreiheit eine **notwendige** Bedingung darstellt, da ansonsten ein Widerspruch entstünde. Ist die Wirbelfreiheit aber auch in jedem Fall **hinreichend**? Es wird sich zeigen, dass diese Frage mit der *Topologie* des betrachteten Gebietes Ω zusammenhängt.

Wir beschränken uns im folgenden auf *zusammenhängende Gebiete*. Ein Gebiet $\Omega \subset E_3$ heißt zusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte aus Ω durch eine ganz in Ω verlaufende stetig differenzierbare Kurve verbinden lassen.

Zur weiteren Untersuchung versuchen wir, ein Potential zu konstruieren. Dazu gehen wir davon aus, dass die Zirkulation des Vektorfeldes \vec{a} für beliebige, stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurven $C \in \Omega$ verschwindet,

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C \subset \Omega \quad \text{mit} \quad \partial C = \emptyset. \quad (4.31)$$

Aus dieser Bedingung folgt (4.30). Würde nämlich irgendwo im Gebiet $\text{rot } \vec{a}$ nicht verschwinden, könnte man lokal eine Fläche A konstruieren, mit einem von Null verschiedenen Fluss der Rotation. Dann wäre nach dem Integralsatz von Stokes das Integral (4.31) ebenfalls von Null verschieden, was nicht sein kann. Die Umkehrung dieser Schlussweise gilt aber nicht in jedem Fall. Wir halten fest, dass (4.30) notwendig, jedoch nicht hinreichend für (4.31) ist.

Unter der Voraussetzung (4.31) ist das Arbeitsintegral unabhängig vom Integrationsweg, und hängt nur von dessen Anfangs- und Endpunkt ab. Das kann man leicht einsehen. Betrachten wir zwei Kurven C_1 und C_2 von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 , dann ist

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} \\ &= \oint_{C_1 - C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0, \end{aligned}$$

und daher

$$\int_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Es genügt, die Punkte \vec{r}_1 und \vec{r}_2 als Grenzen anzugeben. Weil das Gebiet Ω zusammenhängend ist, existiert auch stets eine Kurve, die die Punkte verbindet.

Man setzt nun

$$\lambda(\vec{r}) = \lambda_0 + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}', \quad (4.32)$$

wobei der Bezugspunkt \vec{r}_0 und das Bezugspotential λ_0 frei wählbar sind.

Wenn das Potential λ wenigstens stetig differenzierbar ist, so gilt nach dem Hauptsatz der Integralrechnung

$$\lambda(\vec{r}_2) - \lambda(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad } \lambda \cdot d\vec{r}.$$

Zusammen mit (4.32) erhält man daraus

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{a} - \text{grad } \lambda) \cdot d\vec{r} = 0.$$

Das Integral verschwindet für beliebige Integrationswege in Ω , so dass gilt

$$\vec{a} = \text{grad } \lambda.$$

Unter der Bedingung (4.31) konnte damit die Existenz eines Potentials nachgewiesen werden. Das Vektorfeld \vec{a} wird dann als *Gradientenfeld* bezeichnet.

Aufgrund der Freiheit in der Wahl des Bezugspunktes \vec{r}_0 und des Bezugspotentials λ_0 ist das Potential nicht eindeutig bestimmt. Sind λ_1 und λ_2 beides Potentiale desselben Vektorfeldes,

$$\vec{a} = \text{grad } \lambda_1 = \text{grad } \lambda_2,$$

so folgt für die Differenz $\tilde{\lambda} = \lambda_1 - \lambda_2$

$$\text{grad } \tilde{\lambda} = \text{grad } \lambda_1 - \text{grad } \lambda_2 = \vec{a} - \vec{a} = 0,$$

und mit dem Hauptsatz der Integralrechnung

$$\tilde{\lambda}(\vec{r}_2) - \tilde{\lambda}(\vec{r}_1) = 0 \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \Omega.$$

Die Differenzfunktion muss konstant sein. Zwei Potentiale desselben Vektorfeldes können sich also höchstens um eine Konstante unterscheiden.

Offen bleibt die Frage, unter welcher Voraussetzung die Bedingung (4.30) hinreichend ist. Offenbar reicht es aus, wenn man zu jeder geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Kurve $C \subset \Omega$ eine Fläche A konstruieren kann, die ebenfalls ganz in Ω liegt, und von C berandet wird, das heißt

$$\forall C \subset \Omega \quad \text{mit} \quad \partial C = \emptyset : \quad \exists A \subset \Omega \quad \text{mit} \quad \partial A = C. \quad (4.33)$$

Auf diese Fläche wendet man ausgehend von (4.30) den Integralsatz von Stokes an, und findet

$$0 = \iint_A \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{A} = \oint_{C=\partial A} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Wenn $\text{rot } \vec{a} = 0$ im ganzen Raum E_3 gilt, ist deshalb die Bedingung (4.30) auch hinreichend, da zu jeder geschlossenen Kurve in E_3 eine Fläche A gefunden werden kann, die in die Kurve eingespannt ist.

Eine etwas größere Klasse geeigneter Gebiete sind die sogenannten *sternförmigen Gebiete*. Ein sternförmiges Gebiet Ω ist dadurch gekennzeichnet, dass ein

ausgezeichneter Punkt O existiert, so dass für jeden Punkt $P \in \Omega$ die Strecke \overline{OP} ganz in Ω liegt. Wählt man O als Ursprung, so bildet die Abbildung

$$\varphi_t : \Omega \rightarrow \Omega : \vec{r} \mapsto t\vec{r}, \quad t \in [0, 1] \quad (4.34)$$

Ω stetig in O ab, so dass φ_1 die identische Abbildung ist, und φ_0 jeden Punkt aus Ω auf O abbildet. Man nennt die Familie der durch (4.34) gegebenen Abbildungen eine *Homotopie*. Mit Hilfe der Homotopie (4.34) kann das sternförmige Gebiet Ω auf den Punkt O kontrahiert werden. Die Bedeutung homotoper Abbildungen liegt darin, dass mit ihnen die in (4.33) verlangte Fläche konstruiert werden kann. Ist zum Beispiel eine geschlossene Kurve C gegeben, so wird durch $\varphi_t(C)$ eine Kegelfläche A mit der Spitze in O erzeugt, wenn t die Werte von Eins bis Null durchläuft. Die Kegelfläche besitzt die gewünschte Eigenschaft $\partial A = C$.

Eine noch etwas größere Klasse sind die *einfach zusammenhängenden Gebiete*. Ein Gebiet Ω heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede in Ω liegende doppelpunktfreie geschlossene stetig differenzierbare Kurve C stetig innerhalb Ω auf einen Punkt in Ω zusammenziehen lässt. Anschaulich gesprochen wird durch den Prozess des „Zusammenziehens“ der geschlossenen Kurve C auf einen Punkt wieder eine Fläche überstrichen, die ganz in Ω liegt und die geforderte Eigenschaft $C = \partial A$ besitzt.

Wie sehen sternförmige beziehungsweise einfach zusammenhängende Gebiete aus? Betrachten wir Beispiele.

- Der Halbraum

$$\{\vec{r} \in E_3 \mid z > 0\}$$

ist sternförmig und damit einfach zusammenhängend.

- Der Raum E_3 , aus dem eine Kugel vom Radius R herausgenommen wurde,

$$\{\vec{r} \in E_3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > R^2\},$$

ist nicht sternförmig, jedoch einfach zusammenhängend. Jede geschlossene Kurve kann über die ausgesparte Kugel „hinweggezogen“ werden.

- Der Raum E_3 , aus dem ein Zylinder vom Radius a herausgenommen wurde,

$$\{\vec{r} \in E_3 \mid x^2 + y^2 > a^2\},$$

ist weder sternförmig, noch einfach zusammenhängend. Jede geschlossene Kurve, die die z -Achse umfasst, bleibt an dem ausgesparten Zylinder „hängen“.

Es gibt eine auffällige Parallelität zwischen den Eigenschaften der geometrischen Objekte und jenen der Felder.

- Die Randkurve einer Fläche ist stets geschlossen, $\partial(\partial A) = \emptyset$.
 \Rightarrow Es gilt stets $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \lambda = 0$.
- Zu jeder Kurve C mit $\partial C = \emptyset$ existiert eine ganz im Gebiet enthaltene Fläche A mit $C = \partial A$.
 \Rightarrow Zu jedem Vektorfeld \vec{a} mit $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ existiert ein Potential λ mit $\vec{a} = \operatorname{grad} \lambda$.

Natürlich müssen die geometrischen Objekte und die Felder hinreichend glatt sein. Diese Beobachtungen sind nicht zufällig, sondern Ausdruck eines weit reichenden *Dualitätsprinzips*. Die genauere Untersuchung solcher Zusammenhänge ist Gegenstand der *algebraischen Topologie*, einem Teilgebiet der Mathematik. Für weitere Details muss auf die Literatur verwiesen werden, zum Beispiel auf [Jän92].

Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Ein Vektorfeld ist wirbelfrei, $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.
- (ii) Ein Vektorfeld ist ein Gradientenfeld, $\vec{a} = \operatorname{grad} \lambda$.
- (iii) Das Arbeitsintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.
- (iv) Das Arbeitsintegral über eine geschlossene Kurve verschwindet.

Die Aussagen (ii) bis (iv) sind auch für beliebige, nicht notwendigerweise einfach zusammenhängende Gebiete äquivalent.

All diese Überlegungen lassen sich in weitgehender Analogie auf die Gleichung (4.29) ausdehnen. Die Bedingung

$$\operatorname{div} \vec{b} = 0 \tag{4.35}$$

ist notwendig dafür, dass das Vektorfeld \vec{b} durch ein *Vektorpotential* \vec{a} in der Form

$$\vec{b} = \operatorname{rot} \vec{a}$$

ausgedrückt werden kann. Eine notwendige und hinreichende Bedingung ist die Forderung, dass der Fluss des Vektorfeldes \vec{b} für beliebige, stückweise stetig differenzierbare geschlossene Flächen $A \in \Omega$ verschwindet,

$$\oint_A \vec{b} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \forall A \subset \Omega \quad \text{mit} \quad \partial A = \emptyset, \tag{4.36}$$

was hier nicht bewiesen werden soll.

Die Bedingung (4.35) ist dann hinreichend, wenn man zu jeder geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Fläche $A \subset \Omega$ ein räumliches Gebiet V konstruieren kann, das ganz in Ω liegt, und von A berandet wird, das heißt

$$\forall A \subset \Omega \quad \text{mit} \quad \partial A = \emptyset : \quad \exists V \subset \Omega \quad \text{mit} \quad \partial V = A. \quad (4.37)$$

Wendet man, ausgehend von (4.35), auf dieses räumliche Gebiet den Integralsatz von Gauss an, bekommt man

$$0 = \iiint_V \operatorname{div} \vec{b} \, dV = \oiint_{A=\partial V} \vec{b} \cdot d\vec{A}.$$

In sternförmigen Gebieten kann unter Verwendung der Homotopie (4.34) zu jeder geschlossenen Fläche A ein geeignetes räumliches Gebiet V konstruiert werden. In sternförmigen Gebieten ist also (4.35) notwendig und hinreichend für die Existenz eines Vektorpotentials.

Auch das Vektorpotential zu einem gegebenen Vektorfeld \vec{b} ist nicht eindeutig bestimmt. Ausgehend von einem Vektorpotential \vec{a}_1 kann mit einer beliebigen stetig differenzierbaren Funktion λ ein Vektorpotential

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \operatorname{grad} \lambda \quad (4.38)$$

konstruiert werden. Dann ist nämlich

$$\operatorname{rot} \vec{a}_2 = \operatorname{rot}(\vec{a}_1 + \operatorname{grad} \lambda) = \operatorname{rot} \vec{a}_1 = \vec{b}.$$

In der elektromagnetischen Feldtheorie wird (4.38) als *Eichtransformation* bezeichnet, die damit einher gehende Freiheit in der Wahl des Vektorpotentials als *Eichfreiheit*.

Es stellt sich die Frage, ob durch (4.38) alle oder nur ein Teil der möglichen Vektorpotentiale zum gegebenen Vektorfeld \vec{b} erfasst werden. Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet kann diese Frage leicht beantwortet werden. Sind \vec{a}_1 und \vec{a}_2 beides Vektorpotentiale desselben Vektorfeldes,

$$\vec{b} = \operatorname{rot} \vec{a}_1 = \operatorname{rot} \vec{a}_2,$$

so folgt für die Differenz $\vec{\tilde{a}} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$

$$\operatorname{rot} \vec{\tilde{a}} = \operatorname{rot} \vec{a}_1 - \operatorname{rot} \vec{a}_2 = \vec{b} - \vec{b} = 0.$$

Ein wirbelfreies Feld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist durch ein Potential darstellbar,

$$\vec{\tilde{a}} = \operatorname{grad} \lambda,$$

woraus gerade (4.38) folgt. Zwei Vektorpotentiale desselben Vektorfeldes können sich auf einem einfach zusammenhängende Gebiet höchstens um einen Gradient unterscheiden.

Wir fassen die Erkenntnisse in einer für die Anwendung geeigneten kompakten Form zusammen im

Satz 4.5 (2. Lemma von Poincaré). *Betrachtet wird ein sternförmiges Gebiet $\Omega \subset E_3$ und auf Ω definierte, wenigstens stetig differenzierbare Vektorfelder \vec{a} und \vec{b} . Dann gilt:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Jedes wirbelfreie Vektorfeld besitzt ein Potential,} \\ \text{rot } \vec{a} = 0 \Rightarrow \exists \gamma : \vec{a} = \text{grad } \gamma, \\ \text{jedes quellenfreie Vektorfeld besitzt ein Vektorpotential,} \\ \text{div } \vec{b} = 0 \Rightarrow \exists \vec{a} : \vec{b} = \text{rot } \vec{a}. \end{array} \right.$$

Gebiete, die die Voraussetzung von Satz (4.5) erfüllen, werden auch *topologisch trivial* genannt.

Auf Satz 4.5 beruht die Existenz der skalaren und vektoriellen Potentiale, wie sie in der elektromagnetischen Feldtheorie üblich sind. Es bleibt die Frage offen, was passieren kann, wenn die topologische Voraussetzung für das Gebiet nicht erfüllt ist. Dieser Frage soll im letzten Abschnitt der Vorlesung nachgegangen werden.

4.4.3 Beispiele

Beispiel 1: Potential eines Gradientenfeldes

Gegeben ist das im ganzen Raum E_3 erklärte Vektorfeld

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2x + 3yz^2 \\ 3xz^2 \\ 6xyz + 3z^2 \end{pmatrix}$$

in kartesischen Koordinaten bezüglich $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Handelt es sich dabei um ein Gradientenfeld? Falls dies zutrifft, ermittle man ein Potential.

Der Raum E_3 ist topologisch trivial, daher ist das Verschwinden der Rotation von \vec{a} notwendig und hinreichend für die Existenz eines Potentials. Es ist

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} 6xz - 6xz \\ 6yz - 6yz \\ 3z^2 - 3z^2 \end{pmatrix} = 0,$$

also existiert ein Potential.

Wir berechnen das Potential mit Hilfe von (4.32). Der Einfachheit halber wählen wir zu dessen Berechnung $\vec{r}_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$ und den Weg $C = C_1 + C_2 + C_3$ parallel zu den kartesischen Koordinatenachsen:

$$C_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0, x], \quad C_2 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0, y],$$

$$C_3 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}, t \in [0, z].$$

Dann ist in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \lambda(x, y, z) &= \int_0^{\vec{r}} \vec{a}(x, y, z) \cdot d\vec{r}' \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^y \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^z \begin{pmatrix} 2x + 3yt^2 \\ 3xt^2 \\ 6xyt + 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^x 2t dt + \int_0^y 0 dt + \int_0^z (6xyt + 3t^2) dt \\ &= x^2 + 0 + 3xyz^2 + z^3. \end{aligned}$$

Die Probe $\vec{a} = \text{grad } \lambda$ bestätigt, dass $\lambda(x, y, z) = x^2 + 3xyz^2 + z^3$ das gesuchte Potential ist.

4.4.4 DeRham-Kohomologie

Wir wollen die Zusammenhänge zwischen der Topologie eines Gebietes und dem Abbildungsverhalten der Differentialoperatoren noch etwas näher beleuchten. Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass die betrachteten Felder glatt sind, das heißt beliebig oft stetig differenzierbar.

Wendet man einen linearen (Differential-)Operator auf alle in seinem Definitionsbereich liegenden Felder an, bekommt man die Menge der Felder, die durch den Operator hervorgebracht werden kann. Diese Menge wird als *Bild* des Operators bezeichnet. Im allgemeinen wird ein Teil des Definitionsbereiches auf Null abgebildet. Die Menge aller Felder, die auf Null abgebildet werden, heißt *Kern* des Operators.

Die im letzten Abschnitt erörterten Lemmata von Poincaré lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Auf einem topologisch trivialen Gebiet stimmt das Bild der vorhergehenden Differentiation mit dem Kern der nachfolgenden Differentiation exakt überein.

Dieser Sachverhalt ist in Abb. 4.4 bildlich dargestellt. Man sagt, die entsprechenden Räume skalarer Felder und Vektorfelder bilden zusammen mit den Differentialoperatoren grad, rot, div eine *exakte Sequenz*. Die Gesamtheit der in Abb. 4.4 auftretenden Felder und Differentialoperatoren nennt man *deRham-Komplex* (Georges de Rham, 1903-1990).

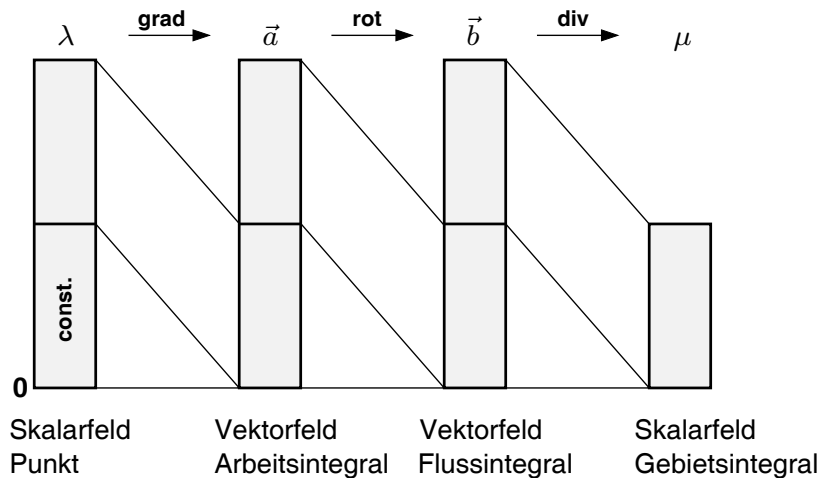


Bild 4.4: Abbildungsverhalten von Gradient, Rotation und Divergenz auf einem topologisch trivialen Gebiet. Das Bild der vorhergehenden Differentiation stimmt mit dem Kern der nachfolgenden Differentiation exakt überein. Man redet deshalb auch von einer exakten Sequenz.

Ergänzend ist noch zu bemerken, dass zwischen den verschiedenen in Abb. 4.4 vorkommenden Feldern und den mit den Feldern verknüpften Integraltypen ein Zusammenhang besteht. Der Zusammenhang wird durch die Integralsätze gestiftet.

$$\underbrace{\lambda|_{\vec{r}_2} - \lambda|_{\vec{r}_1}}_{\text{Punktauswertung}} = \underbrace{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad } \lambda \cdot d\vec{r}}_{\text{Arbeitsintegral}} = \underbrace{\oint_{\partial A} \vec{a} \cdot d\vec{r}}_{\text{Arbeitsintegral}} = \underbrace{\iint_A \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{A}}_{\text{Flussintegral}} = \underbrace{\oiint_{\partial V} \vec{b} \cdot d\vec{A}}_{\text{Flussintegral}} = \underbrace{\iiint_V \text{div } \vec{b} \, dV}_{\text{Gebietsintegral}}$$

Wenn die in Satz 4.5 formulierte topologische Voraussetzung an das Gebiet Ω nicht erfüllt ist, brauchen keine Potentiale zu existieren.

- Es kann wirbelfreie Felder geben, die sich nicht durch ein skalares Potential darstellen lassen.
- Es kann quellenfreie Felder geben, die sich nicht durch ein Vektorpotential darstellen lassen.

Diese Situation ist in Abb. 4.5 ersichtlich. Die beiden Arten von Ausnahmefeldern bilden die erste und zweite *deRham-Kohomologiegruppe* $\mathcal{H}^1(\Omega)$ und $\mathcal{H}^2(\Omega)$. Wir wollen Beispiele für solche Ausnahmefelder angeben.

Betrachten wir zum Beispiel ein toroidales Gebiet Ω_1 , das rotationssymmetrisch zur z -Achse eines Zylinderkoordinatensystems (ρ, φ, z) sein soll, jedoch die Achse nicht enthält. Dieses Gebiet ist nicht einfach zusammenhängend und erfüllt damit die topologische Voraussetzung nicht. Wir betrachten das rein azimutale Feld

$$\vec{\pi}^{(1)} = \frac{1}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi.$$

Das ist die magnetische Feldstärke eines normierten Linienstroms $I = 1$ entlang der z -Achse. Das Feld ist für $\rho > 0$ wirbelfrei,

$$\text{rot } \vec{\pi}^{(1)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \pi_\varphi^{(1)}) = 0.$$

Dennoch kann es nicht als Gradient eines skalaren Potentials in der Form

$$\vec{\pi}^{(1)} = \text{grad } \lambda$$

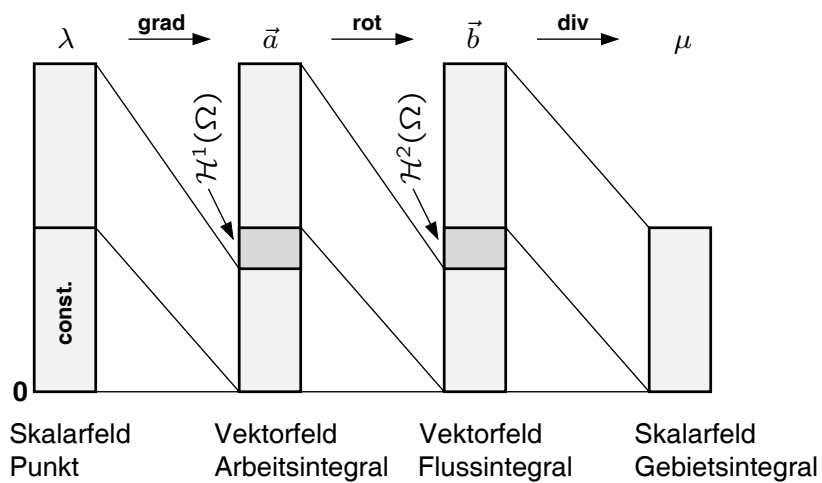


Bild 4.5: Abbildungsverhalten von Gradient, Rotation und Divergenz auf einem topologisch nichttrivialen Gebiet Ω . Es gibt zwei Arten von Ausnahmefeldern: Wirbelfreie Felder, die kein skalares Potential besitzen, sowie quellenfreie Felder, die kein Vektorpotential besitzen. Die beiden Arten von Ausnahmefeldern bilden die erste und zweite deRham-Kohomologiegruppe $\mathcal{H}^1(\Omega)$ und $\mathcal{H}^2(\Omega)$.

dargestellt werden. Um dies einzusehen, betrachten wir einen Kreis K_1 , der in Ω_1 liegt, und dessen Mittelpunkt sich auf der z -Achse befindet. Dann gilt

$$\begin{aligned} \oint_{K_1} \vec{\pi}^{(1)} \cdot d\vec{r} &= 1, \\ \oint_{K_1} \text{grad } \lambda \cdot d\vec{r} &= 0, \end{aligned}$$

wodurch der Widerspruch offensichtlich wird. Das Vektorfeld liegt in der ersten deRahm-Kohomologiegruppe, $\vec{\pi}^{(1)} \in \mathcal{H}^1(\Omega_1)$. Man beachte, dass es nicht möglich ist, eine Fläche zu finden, die durch den Kreis berandet wird und ganz im Gebiet Ω_1 liegt.

Ein anderes, vielleicht weniger bekanntes Beispiel erhält man, wenn man ein Hohlkugel-Gebiet Ω_2 betrachtet, welches konzentrisch zum Ursprung eines Kugelkoordinatensystems (r, ϑ, φ) liegen soll, und eine konzentrische Kugelsphäre K_2 , die in Ω_2 liegt. Bei diesem Beispiel ist es nicht möglich, ein in Ω_2 liegendes, räumliches Gebiet zu finden, welches von K_2 berandet wird. Das Gebiet ist nicht sternförmig und erfüllt deshalb die topologische Voraussetzung nicht. Betrachtet wird nun das Vektorfeld

$$\vec{\pi}^{(2)} = \frac{1}{4\pi r^2} \vec{e}_r,$$

das ist die radial gerichtete elektrische Flussdichte einer normierten Punktladung $Q = 1$ im Ursprung. Das Feld ist für $r > 0$ quellenfrei,

$$\text{div } \vec{\pi}^{(2)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \pi_r^{(2)}) = 0.$$

Dennoch kann es nicht als Rotation eines Vektorpotentials in der Form

$$\vec{\pi}^{(2)} = \text{rot } \vec{a}$$

geschrieben werden. Der Nachweis läuft völlig analog zum vorherigen Fall, denn es gilt

$$\begin{aligned} \oint_{K_2} \vec{\pi}^{(2)} \cdot d\vec{A} &= 1, \\ \oint_{K_2} \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{A} &= 0. \end{aligned}$$

Das Vektorfeld liegt in der zweiten deRahm-Kohomologiegruppe, $\vec{\pi}^{(2)} \in \mathcal{H}^2(\Omega_2)$. Die deRahm-Kohomologiegruppen besitzen die algebraische Struktur von Vektorräumen. Die Dimension der p -ten deRham-Kohomologiegruppe ist die p -te *Betti-Zahl* b_p (Enrico Betti, 1823-1892). Die Betti-Zahlen hängen nur von der Topologie des betrachteten Gebiets ab. Für die in der elektromagnetischen Feldtheorie

üblicherweise betrachteten Gebiete hat man es typischerweise mit kleinen Zahlenwerten zu tun. Wir werden auf diesen Punkt noch kurz zurückkommen.

Wenn $(\vec{\pi}_1^{(1)}, \vec{\pi}_2^{(1)}, \dots, \vec{\pi}_{b_1}^{(1)})$ eine Basis der ersten deRham-Kohomologiegruppe ist, kann man jedes wirbelfreie Vektorfeld \vec{a} folgendermaßen darstellen:

$$\text{rot } \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda, p_i : \quad \vec{a} = \text{grad } \lambda + \sum_{i=1}^{b_1} p_i \vec{\pi}_i^{(1)}. \quad (4.39)$$

Genauso existiert, ausgehend von einer Basis $(\vec{\pi}_1^{(2)}, \vec{\pi}_2^{(2)}, \dots, \vec{\pi}_{b_2}^{(2)})$ der zweiten deRham-Kohomologiegruppe, für jedes quellenfreie Vektorfeld folgende Darstellung:

$$\text{div } \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \vec{a}, q_i : \quad \vec{b} = \text{rot } \vec{a} + \sum_{i=1}^{b_2} q_i \vec{\pi}_i^{(2)}. \quad (4.40)$$

Grob gesprochen besagen die Gleichungen (4.39) und (4.40), dass sich wirbelfreie beziehungsweise quellenfreie Vektorfelder „fast“ durch Potentiale ausdrücken lassen. Im allgemeinen Fall muss die Potentialdarstellung noch durch ein Ausnahmefeld angereichert werden, welches in einem Vektorraum niedriger Dimension liegt, eben der jeweiligen deRham-Kohomologiegruppe.

Für topologisch triviale Gebiete gilt $b_1 = b_2 = 0$ und die Darstellungen (4.39) und (4.40) reduzieren sich auf die übliche Potentialdarstellung aus Satz (4.5).

Die Dualität zwischen den geometrischen Objekten und den Feldern gestattet es, zu einer geometrischen Interpretation der Betti-Zahlen zu kommen. Ausgehend von einem zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset E_3$ gilt folgende Faustregel:

- b_1 misst die Zahl der wesentlich verschiedenen geschlossenen Kurven, die sich nicht als Randkurven einer ganz in Ω enthaltenen Fläche darstellen lassen („loops“).
- b_2 misst die Zahl der wesentlich verschiedenen geschlossenen Flächen, die sich nicht als Hüllflächen eines ganz in Ω enthaltenen Teilgebietes darstellen lassen („holes“).

Für das oben betrachtete toroidale Gebiet Ω_1 gilt $b_1 = 1, b_2 = 0$. Das Ausnahmefeld $\vec{\pi}^{(1)}$ kann als Basis der deRham-Kohomologiegruppe $\mathcal{H}^1(\Omega_1)$ verwendet werden, während $\mathcal{H}^2(\Omega_1) = \emptyset$ ist. Daher gilt in Ω_1

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \exists \lambda, p : \quad \vec{a} = \text{grad } \lambda + p \vec{\pi}^{(1)}, \\ \text{div } \vec{b} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \exists \vec{a} : \quad \vec{b} = \text{rot } \vec{a}. \end{aligned}$$

Für das Hohlkugelgebiet Ω_2 gilt $b_1 = 0, b_2 = 1, \mathcal{H}^1(\Omega_2) = \emptyset, \vec{\pi}^{(2)}$ ist eine Basis von $\mathcal{H}^2(\Omega_2)$. Daher gilt in Ω_2

$$\text{rot } \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda : \quad \vec{a} = \text{grad } \lambda,$$

$$\operatorname{div} \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \vec{a}, q : \vec{b} = \operatorname{rot} \vec{a} + q \vec{\pi}^{(2)}.$$

Um die Faustregeln zu präzisieren, müsste genauer erörtert werden, was unter „wesentlich verschiedenen“ geschlossenen Kurven beziehungsweise Flächen zu verstehen ist. Das führt auf die Definition von *Homologiegruppen* (homolog=übereinstimmend, entsprechend, artgleich). Dieses Thema soll im Rahmen der Vorlesung nicht weiter vertieft werden. Der interessierte Studierende sei auf die Literatur verwiesen, zum Beispiel [Jän92].

Literaturverzeichnis

- [BS87] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1987.
- [Jän92] K. Jänich. *Vektoranalysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Sch93] H. Schulz. *Physik mit Bleistift*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1993.

Index

- Abbildung
 - bijektive, 21
 - lineare, 3
- Additivität, 47, 59
- Arbeitsintegral, 37
- Aufpunkt, 19
- Band
 - Möbius'sches, 44
- Basis, 3
 - negativ orientierte, 11
 - orthonormale, 10
 - positiv orientierte, 11
- Basisfeld, 20
 - kartesisches, 20
 - natürliches, 22
- Bereich
 - regulärer
 - dreidimensionaler, 58
 - zweidimensionaler, 42
- Betti-Zahl, 106
- Bild, 103
- Bogenlänge, 34
- deRham
 - deRham-Kohomologiegruppe, 104
 - deRham-Komplex, 103
- Determinante
 - Gram'sche, 10
- Differenzierbarkeit
 - stetige, 21
- Dimension, 3
- Divergenz, 88
- Dualitätsprinzip, 99
- Durchlaufsinne, 32
- Eichfreiheit, 100
- Eichtransformation, 100
- Entwicklungssatz, 17
- Ergiebigkeit, 90
 - spezifische, 90
- Feld
 - skalares, 20
 - vektorielles, 20
- Fläche
 - stückweise stetig differenzierbare, 43
 - stetig differenzierbare, 42
- Flächenelement
 - skalares, 51
 - vektorielles, 52
- Flächeninhalt, 48
- Flussintegral, 51
- Fortsetzung
 - lineare, 5
- Fubini
 - Satz von, 47, 59
- Gebiet
 - einfach zusammenhängendes, 98
 - räumliches
 - stetig differenzierbares, 60
 - sternförmiges, 97
 - topologisch triviales, 101
 - zusammenhängendes, 96
- Gebietsintegral, 46
 - räumliches, 59
- Geschwindigkeitsfeld, 82
- Gradient, 69
- Gradientenfeld, 97
- Guldin'sche Regel, 63
- Hauptsatz der Integralrechnung, 70
- Homologiegruppe, 108
- Homotopie, 98
- Inhalt
 - orientierter, 15
- Integralsatz
 - Gauß'scher, 89
 - Stokes'scher, 80
- Isomorphismus, 3

- Kern, 103
- Kettenregel
 - für den Gradienten, 70
- Komponenten
 - eines Vektors, 3
 - kartesische, 20
- Koordinaten
 - eines Vektors, 3
 - kartesische, 20
 - kontravariante, 6
- Koordinatenflächen, 22
- Koordinatenlinien, 21
- Koordinatensystem, 19
 - kartesisches, 19
 - krummliniges, 21
 - orthogonales, 22
- Kreuzprodukt, 12
- Kronecker-Symbol, 10
- Kugelkalotte, 54
- Kugelkoordinaten, 26
- Kurve
 - doppelpunktfreie, 32
 - geschlossene, 32
 - offene, 32
 - orientierte, 32
 - stückweise stetig differenzierbare, 33
 - stetig differenzierbare, 33
- Linearität, 59
 - der Divergenz, 88
 - der Rotation, 80
 - des Gebietsintegrals, 47
 - des Gradienten, 70
- Linienelement
 - skalares, 36
 - vektorielles, 37
- Maßstabskoeffizienten, 22
- Masse, 62
- Mittelwertsatz, 47, 59
- Monotonie, 47, 59
- Normalbereich, 42, 58
- Normaleneinheitsvektor, 43
- Normalenvektor, 43
- Paraboloid, 65
- Parallelfach, 10
- Parameterbereich, 42, 60
- Parameterdarstellung
 - zulässige, 33, 43, 60
- Parameterlinien, 42, 60
- Potential, 70, 95
- Potentialfunktion, 70
- Produktregel
 - für den Gradienten, 70
 - für die Divergenz, 88
 - für die Rotation, 80
- Quelldichte, 90
- Quellpunkt, 19
- Quellstärke, 90
- Rand
 - einer Kurve, 32
- Raum
 - Euklidisch-affiner, 18
- Richtungsableitung, 72
- Riemann-Summe, 46
- Rotation, 78
- Rotationsfläche, 53
- Rotationskörper, 62
- Sattelfläche, 55
- Satz von Schwarz, 95
- Schraubsinn, 11
 - Linksschraubsinn, 11
 - Rechtsschraubsinn, 11
- Schwerpunkt, 62
- Sequenz
 - exakte, 103
- Skalarprodukt, 8
- Spatprodukt, 15
- Tangente, 33
- Tangenteneinheitsvektor, 33
- Tangentenvektor, 33
- Tangentialebene, 44
- Tangentialraum, 20
- Teilraum
 - affiner, 33, 44
- Tensor
 - erster Stufe, 5
 - nullter Stufe, 5
 - zweiter Stufe, 5
- Topologie, 95
 - algebraische, 99
- Trägheitsmoment, 62
- Ungleichung

Schwarz'sche, 72

Vektor

Einheitsvektor, 8
freier Vektor, 2
gebundener Vektor, 2
Koordinatenvektor, 3
orthogonaler, 9
Spaltenvektor, 4
Zeilenvektor, 4

Vektoren

komplanare, 15
linear unabhängige, 3

Vektorfeld

quellenfreies, 90
wirbelfreies, 82

Vektorpotential, 80, 99

Vektorraum

Euklidischer, 8
linearer, 2
orientierter, 11

Volumenelement, 61

Zerlegung, 46

Zirkulation, 81

spezifische, 81

Zylinderkoordinaten, 24

Impressum

Dieses Skriptum entstand parallel zu den Vorlesungen, die ich im Wintertrimester 2004 an der Helmut-Schmidt-Universität gehalten habe. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Ing. Andreas Priesmeyer für das sorgfältige Anfertigen der Zeichnungen.

Teile des Skriptums wurden aus folgenden Quellen kompiliert:

DIN 4895: Orthogonale Koordinatensysteme, 1977.

K. Kirchgässner, K. Ritter und P. Werner. Höhere Mathematik Teil 3: Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Veränderlichen. Vorlesungsskript, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1974.

H.J. Paus. Mathematische Hilfsmittel zur Experimentalphysik I und II. Vorlesungsskript, Universität Stuttgart, Physikalisches Institut, Teilinstitut 2, Stuttgart, 1987.

S. Rjasanow. Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure. Universität des Saarlandes, Saarbrücken.

H. Schulz. *Physik mit Bleistift*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1993.

W. Zeuge. Begleitskript zur Vorlesung Mathematik II für Ingenieure. Vorlesungsskript, Universität der Bundeswehr Hamburg, Fachbereich Maschinenbau, Hamburg-Wandsbek, 2003.

Die Urheberrechte der jeweiligen Autoren sind zu beachten.

Hamburg, im März 2004,

Stefan Kurz.